



KFA



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH

GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik

**Xenonschwingungen und ihre Regelung
bei großen Leistungsreaktoren**

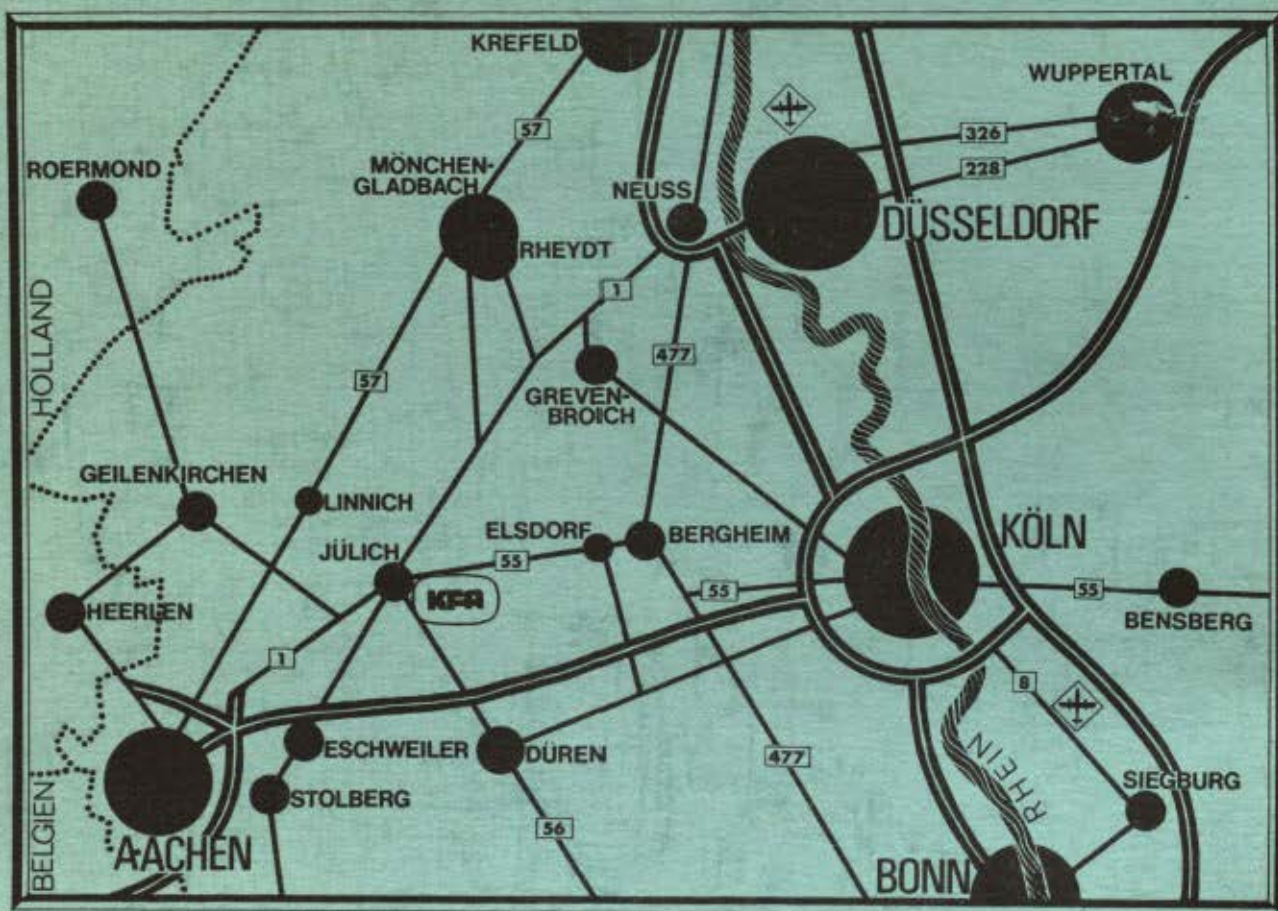
von

W. Hanke

Jül - 1054 - MA

März 1974

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich - Nr. 1054

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik Jülich - 1054 - MA

Dok.: HTGR-Type Reactor - Reactor Dynamics
 Xenon Oscillation
 Optimal Control
 Mathematical Model - Parameter Study
 Computer Calculation

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
 Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Xenonschwingungen und ihre Regelung bei großen Leistungsreaktoren

von

W. Hanke

INHALTSVERZEICHNIS

KAP. I	Problemstellung	1
§ 1	Einleitung	1
§ 2	Diffusionsgleichung	3
§ 3	Ausgangsgleichungen	5
KAP. II	Schwingungen	9
§ 4	Entstehung	9
§ 5	Räumliche Schwingungen	11
§ 6	Stabilität	16
KAP. III	Regelung	21
§ 7	Das Kriterium	21
§ 8	Methode	24
§ 9	Lösung des Gleichungs- systems	28
KAP. IV	Ergebnisse	31
§ 10	Ausgangsdaten	31
§ 11	Beschreibung der Ergebnisse	34
Literatur		36
Anhang		43

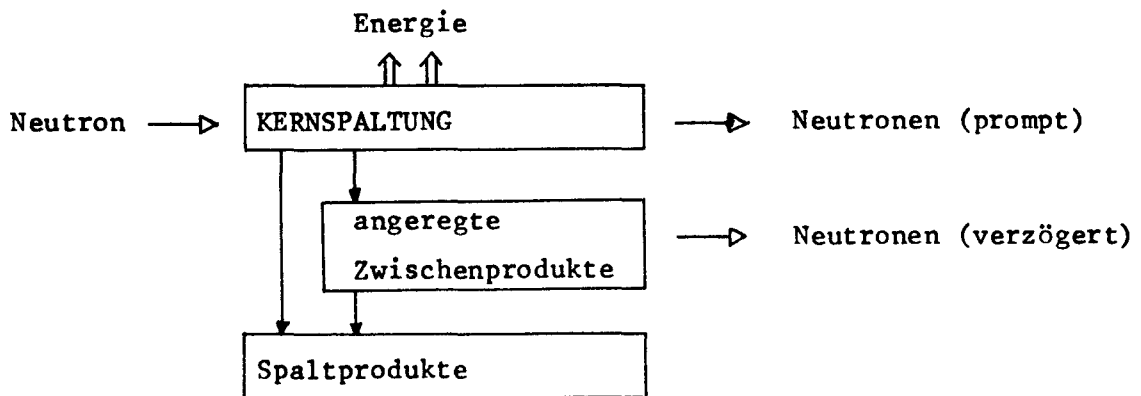
KAP. I: PROBLEMSTELLUNG

§ 1. Einleitung

Die in einem thermischen Reaktor ablaufenden Vorgänge lassen sich aufgrund ihrer spezifischen Zeitmaßstäbe in 3 Klassen einteilen.

- a) Kurzzeitdynamik (Kritikalitätsregelung)
- b) Xenonvergiftung
- c) Abbrand

a) Für die Kurzzeitdynamik ist der Zeitbereich die Sekunde. Bei der Kernspaltung entstehen nicht nur prompte Neutronen, sondern auch durch den Zerfall instabiler Zwischenprodukte verzögerte Neutronen, deren Halbwertszeit zwischen 0,05 und 56 sec. schwankt. [20]



Für die Berechnung des Transientenverhaltens (z.B. Lastabwurf oder Einschalten des Reaktors) benötigt man die Neutronenbilanz unter Berücksichtigung der (üblich 6) Gruppen verzögerter Neutronen [19].

c) Der Abbrand spielt sich im Bereich von Wochen und Monaten ab. Unter Abbrand versteht man den Aufbau der Spaltprodukte und die Erbrütung neuen Spaltmaterials. Die typische Zeiteinheit wird verursacht durch die Energieerzeugung und die Aufenthaltszeit der Brennelemente im Reaktor.

b) Dazwischen gibt es mit fließendem Übergang, jedoch für numerische Rechnungen gut trennbar, den Bereich der Xenonschwingungen.

^{135}Xe leistet von allen Spaltprodukten, die in einem thermischen Reaktor entstehen, bei weitem die größte Neutronenabsorption. Es entsteht verzögert und zerfällt. Für die hiermit verbundenen Erscheinungen ist der Stundenbereich charakteristisch.

Die weiteren Untersuchungen des Berichtes behandeln nur diesen Bereich und das Spaltprodukt Xenon.

§ 2. Diffusionsgleichung

Für unser Problem ist die Diffusionsnäherung der Neutronentransportgleichung zulässig [6,57]. Die energieabhängige Form der Diffusionsgleichung lautet

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad \frac{1}{v} \dot{\phi}(\mathbf{r}, E, t) = & \nabla D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E, t) \\
 & + \chi(E) \cdot (1 - \sum_i \beta_i) v \cdot \int_E \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' \\
 & - \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) + \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, E, t) \\
 & + \int_E \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE', \\
 \dot{C}_i(\mathbf{r}, E, t) = & \beta_i v(E) \cdot \int_E \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, E, t) \\
 & i = 1, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

Zur Behandlung des Xenonproblems können die verzögerten Neutronen vernachlässigt werden, d.h.

$$\beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Wir diskretisieren die Energie in Gruppen (E_1, E_{1+1}) , $1 = 1, \dots, L$, wobei die Größen aus (E_1, E_{1+1}) den Index 1 erhalten sollen und erhalten so die Multigruppendifusionsgleichung

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad \frac{1}{v} \dot{\phi}_1(\mathbf{r}, t) = & \nabla D_1(\mathbf{r}) \nabla \phi_1(\mathbf{r}, t) + \chi_1 v \sum_{1'=1}^L F_{1'}(\mathbf{r}, t) \phi_{1'}(\mathbf{r}, t) \\
 & - A_1(\mathbf{r}, t) \phi_1(\mathbf{r}, t) + \sum_{1'=1}^L S_{11'}(\mathbf{r}) \phi_{1'}(\mathbf{r}, t) \\
 & 1 = 1, \dots, L
 \end{aligned}$$

wobei F für den Spaltquerschnitt Σ_f
 A für den Absorptionsquerschnitt Σ_a
 und S für den Streuquerschnitt Σ_s gesetzt wurde.

Bei der Behandlung des Xe-Problems interessiert zeitlich nur der Stundenbereich. Daher geht man von der zeitabhängigen zur stationären Diffusionsgleichung über. Damit ist aber (2.2) zu einer Eigenwertgleichung geworden. Es ist nun üblich, einen Eigenwert k einzuführen, so daß insgesamt entsteht

$$(2.3) \quad 0 = \nabla D_1(\mathbf{r}) \nabla \phi_1(\mathbf{r}, t) + \chi_1 \frac{\nu}{k} \sum_{l'=1}^L F_{1l'}(\mathbf{r}, t) \phi_{1l'}(\mathbf{r}, t) - A_1(\mathbf{r}, t) \phi_1(\mathbf{r}, t) + \sum_{l'=1}^L S_{1l'}(\mathbf{r}) \phi_{1l'}(\mathbf{r}, t)$$

$$l = 1, \dots, L.$$

Zur Behandlung des Xenonproblems müssen wir noch den makroskopischen Absorptionsquerschnitt $A_1(\mathbf{r}, t)$ zerlegen in einen xenonunabhängigen Anteil $\Sigma_1(\mathbf{r}, t)$ und eine vom Xenon verursachte Absorption $\sigma_1 \cdot X_1(\mathbf{r}, t)$.

Für die zu untersuchenden Xenonschwingungen ist der Abbrand zu vernachlässigen, d.h. wir können $F_1(\mathbf{r}, t)$ und $\Sigma_1(\mathbf{r}, t)$ als zeitunabhängig betrachten. Damit erhalten wir insgesamt

$$0 = \nabla D(\mathbf{r}) \nabla \phi_1(\mathbf{r}, t) + \chi_1 \frac{\nu}{k} \sum_{l'=1}^L F_{1l'}(\mathbf{r}) \phi_{1l'}(\mathbf{r}, t) - A_1(\mathbf{r}, t) \phi_1(\mathbf{r}, t) - \sigma_1 X_1(\mathbf{r}, t) \phi_1(\mathbf{r}, t) + \sum_{l'=1}^L S_{1l'}(\mathbf{r}) \phi_{1l'}(\mathbf{r}, t).$$

Nun ist σ_1 nur im thermischen Energiebereich nennenswert groß. Deshalb genügen i.a. 2 Energiegruppen (schnell und thermisch). Wegen der Komplexität des Regelungsproblems beschränken wir uns in diesem Bericht auf die Eingruppendiffusionsgleichung.

Für die untersuchten Reaktorauslegungen kann man D als konstant voraussetzen. Dann ergibt sich die hier verwendete Form der Diffusionsgleichung

$$(2.5) \quad 0 = D \Delta \phi(\mathbf{r}, t) + \left[\frac{\nu}{k} F(\mathbf{r}) - \Sigma(\mathbf{r}) - \sigma \cdot X(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \phi(\mathbf{r}, t).$$

§ 3. Ausgangsgleichungen

In der verwendeten Diffusionsgleichung

$$(3.1) \quad 0 = D \Delta \phi(x, t) + \left[\frac{\nu}{k} F(x) - \Sigma(x) - \sigma \cdot X(x, t) \right] \phi(x, t) - u(x, t) \cdot \phi(x, t)$$

bedeuten

$$\phi = \text{Neutronenflu\ss} \left[\frac{\text{neutronen}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}} \right]$$

$$D = \text{Diffusionskonstante} \left[\text{cm} \right]$$

$$\nu = \text{Multiplikationsfaktor} \left[1 \right]$$

$$F = \text{Spaltquerschnitt} \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

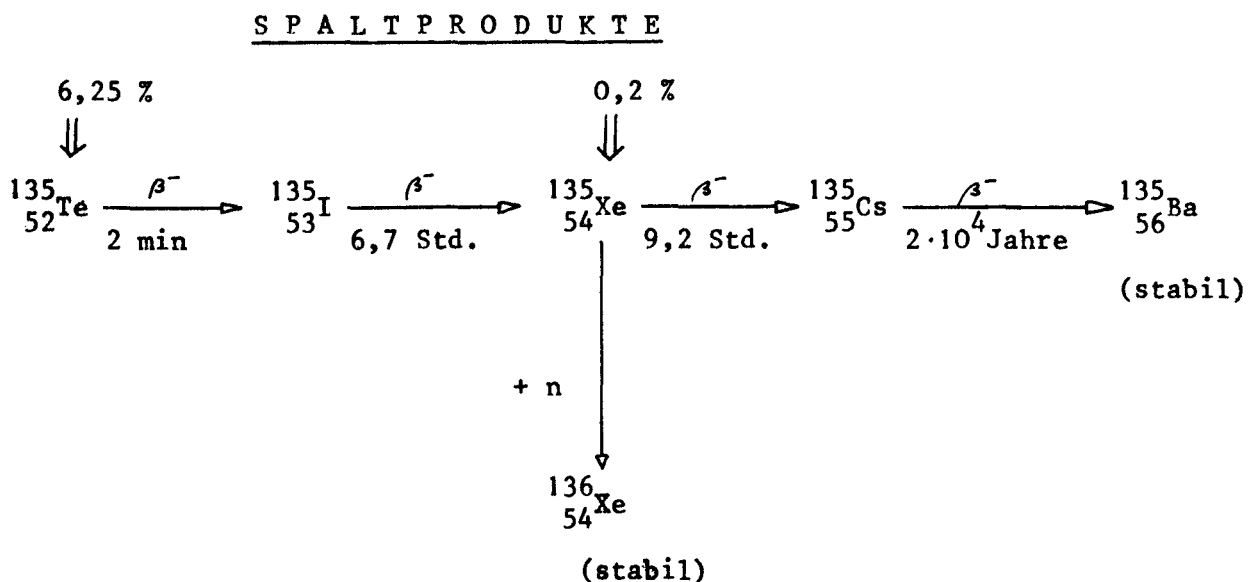
$$\Sigma = \text{Absorptionsquerschnitt} \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

$$u = \text{zus\ddot{a}tzliche Absorption (Regelung)} \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

$$X = \text{Xenonkonzentration } {}^{135}_{54}\text{Xe} \left[\frac{\text{atome}}{\text{cm}^3} \right]$$

$$\sigma = \text{mikroskopischer Absorptionsquerschnitt von } {}^{135}_{54}\text{Xe} \text{ f\ddot{u}r Neutronen} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{atom}} \right] .$$

Betrachten wir zun\ddot{a}chst die Xenon enthaltende Zerfallskette:



Um das Xenonverhalten zu beschreiben, benötigen wir noch die Gleichungen für die Jod- und Xenonkonzentrationen.^{x)}

Sie lauten

$$(3.2) \quad \dot{I}(u, t) = y_i F(u) \cdot \phi(u, t) - c_i I(u, t)$$

$$(3.3) \quad \dot{X}(u, t) = y_x F(u) \cdot \phi(u, t) + c_i I(u, t) - c_x X(u, t) - \sigma \cdot X(u, t) \cdot \phi(u, t)$$

mit

$$I = \text{Jodkonzentration} \left[\frac{\text{atome}}{\text{cm}^3} \right]$$

$$\begin{matrix} c_i \\ c_x \end{matrix} = \text{Zerfallskonstanten für} \begin{matrix} \text{Jod} \\ \text{Xenon} \end{matrix} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$$

$$\begin{matrix} y_i \\ y_x \end{matrix} = \text{Produktionsraten für} \begin{matrix} \text{Jod} \\ \text{Xenon} \end{matrix} \left[1 \right] \text{ bzw. } \left[\% \right]$$

Die einzelnen Terme bedeuten:

für (3.2)

$y_i F \phi$: Entstehung von Jod durch Spaltung

$c_i I$: Zerfall von Jod in Xenon

und für (3.3)

$y_x F \phi$: Entstehung von Xenon durch Spaltung

$c_i I$: Entstehung von Xenon aus Jodzerfall

$c_x X$: Zerfall von Xenon (in Caesium)

$\sigma X \phi$: Übergang (Abbrand) in das vernachlässigbare $^{136}_{54}$ Xenon.

Um den Xenoneffekt zu verstehen, betrachten wir 3 Einzelphänomene: den Zerfall von Jod und Xenon, die Leistungsregelung und den Xenonabbrand:

^{x)} Der Zwischenschritt Tellur kann vernachlässigt werden, da z.B. nach 10 min schon 97 % Tellur zu Jod zerfallen ist.

a) Zerfall:

Wird der stationäre Fluß auf ein höheres Niveau gehoben, so wird mehr Jod entstehen, das verzögert in Xenon zerfällt. Jod und Xenon werden sich also (abhängig von deren Zeitkonstanten) den neuen stationären Werten anpassen.

Wird der stationäre Fluß gesenkt, so wird spontan weniger Jod und Xenon durch Spaltung erzeugt. Der früher höhere Jodpegel wird jedoch noch zeitverzögert mehr Xenon nachliefern. Wegen der höheren Halbwertszeit von Xenon wird also in der Regel ein Xenonberg entstehen.

b) Leistungsregelung:

Bei einem Reaktor mit konstanter Leistung ist $\int \phi \cdot F \, dV = \text{const.}$ Nimmt man an einer Stelle des Cores aufgrund lokaler Vergrößerung der Absorption (z.B. vermehrter Xenonaufbau an dieser Stelle) der Fluß ab, so sorgt der Mechanismus der Leistungsregelung dafür, daß an anderen Stellen der Fluß entsprechend angehoben wird, so daß die Gesamtleistung konstant bleibt. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß einzelne oder mehrere Absorberstäbe entsprechend gezogen werden. Regelvorgänge sorgen in diesem Fall für die Kompensation der lokalen Flußabsenkung durch Anhebung des Neutronenflusses an anderer Stelle.

c) Xenonabbrand:

Durch Neutronenaufnahme geht $^{135}_{54}\text{Xe}$ in $^{136}_{54}\text{Xe}$ über. Die $^{136}_{54}\text{Xe}$ -Absorption ist aber zu vernachlässigen, da es gegenüber seinem 135 -Isotyp einen sehr kleinen Absorptionsquerschnitt besitzt.

Die Xenonverlustrate $\sigma_X \phi$ ist proportional zu ϕ und zu X . Durch diese Nichtlinearität ist der Abbrandeffekt von der absoluten Flußhöhe abhängig [4]. Bei niedrigem Fluß ($\phi < 10^9 \frac{n}{\text{cm}^2 \text{sec}}$) ist der Abbrand zu vernachlässigen. Dann klingt jede Störung ab, und es wird zu keinen Flußschwingungen kommen. Bei hohem Fluß ($\phi > 10^{15} \frac{n}{\text{cm}^2 \text{sec}}$) wird überproportional mit Xenon abbrennen. Das

Überwiegen des Abbrandeffektes hat einen stabilisierenden Einfluß [4] .

Dazwischen aber kann es einen Flußbereich geben, in welchem Schwingungen möglich sind.

Das Zusammenspiel dieser 3 Effekte:

eine Zeitverzögerung,
eine Kopplung über den Ort
und eine Nichtlinearität

liefert Instabilitäten, wozu dann

Stabilitätsgebiete,
Halbwert- bzw. Verdopplungszeit
und Periode

interessieren.

KAP. II: SCHWINGUNGEN

§ 4. Entstehung

Betrachten wir zunächst einen stationären Punktreaktor. Ein Punktreaktor ist ein Reaktor, bei dem alle Variablen über das Reaktorvolumen gemittelt sind. Dann repräsentiert ein Punkt den Reaktor, und alle Veränderlichen sind nur noch zeitabhängig.

Bei einem stationären Punktreaktor halten sich die Xenonanteile, die durch Spaltung und durch Jodzerfall entstehen, mit den Xenonanteilen, die durch Xenonzerfall und durch Abbrand in $^{136}\text{Xenon}$ verschwinden, die Waage.

Wenn nun durch eine Störung der Fluß etwas erhöht wird, wird mehr $^{135}\text{Xenon}$ zu $^{136}\text{Xenon}$ verbrennen. Das bedeutet, daß die $^{135}\text{Xenon}$ konzentration fällt. Wegen des sehr hohen Absorptionsquerschnittes von $^{135}\text{Xenon}$ wird der Gesamtabsorptionsquerschnitt sinken. Weil die Neutronenabsorption abnimmt, wird der Fluß weiter steigen.

Ein System, bei dem kleine Störungen anwachsen, heißt aber instabil.

Die durch Xenon hervorgerufenen Änderungen sind langsam und können bei einem Punktreaktor durch Regemaßnahmen leicht kompensiert werden.

Ist jedoch die räumliche Dimension des Reaktors groß zur Wanderlänge, so genügt das Punktmodell nicht.

Einen großen Reaktor kann man sich als eine Menge über den Fluß gekoppelter Punktreaktoren vorstellen [10] .

Das einfachste Beispiel sind zwei gekoppelte Punktreaktoren, von denen jeder einzelne instabil ist.

Wird durch eine Störung der Fluß im ersten Reaktor angehoben, so setzt dies den oben beschriebenen Prozeß in Gang. Durch die Leistungsnormierung wird dadurch aber der Fluß im anderen

Reaktor gesenkt, was wiederum eine weitere Senkung nach sich zieht.

Dieses Absinken wird begrenzt durch zwei Prozesse:

- 1) Der ansteigende Fluß im ersten Reaktor kann nicht mehr Xenon abbrennen als vorhanden ist.
- 2) Mit zunehmendem Flußunterschied der beiden Reaktoren, d.h. bei großem Flußgradienten, steigt die Diffusion an, bis schließlich der gesamte Neutronenzuwachs auf der einen Seite den Neutronenverlust auf der anderen Seite ausgleicht [60] .

Der Flußanstieg wird sich also verlangsamen, bis er schließlich zum Stehen kommt.

Nach wenigen Stunden wird die Jodkonzentration angestiegen sein. Zeitverzögert wird also auch das Xenon anwachsen. Und im zweiten Reaktor wird die Xenonkonzentration sinken. Die verringerte Xenonkonzentration erniedrigt den Absorptionsquerschnitt: der Fluß steigt.

Jetzt, nach ca. 10-15 Stunden, sind die Voraussetzungen für das Ansteigen des Flusses im zweiten Reaktor gegeben, und dort spielt sich jetzt der zuerst beschriebene Vorgang ab.

Damit ist nach ca. 20-30 Stunden der Ausgangszustand wieder hergestellt.

Das aber ist die Definition einer Schwingung: der Xenonschwingung.

§ 5. Räumliche Schwingungen

Es gibt zwei Klassen von Berechnungsmethoden:

A Nodale

B Modale

A Unter nodalen Methoden versteht man die Diskretisierung in einem Punktgitter bezüglich Ort und Zeit, wobei Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden.

Umfangreiche nodale Untersuchungen zum Schwingungsverhalten sind in [17] zu finden.

B Unter modalen Methoden versteht man Entwicklungen der Größen in Reihen (Moden) und Lösungen des dann entstehenden Gleichungssystems für die Koeffizienten [50] .

Im folgenden sollen kurz die wesentlichsten Entwicklungsmöglichkeiten beschrieben werden (siehe auch [30]).

a) geometrische Moden

Entwickelt man das Problem nach den Eigenfunktionen des Deltaoperators, so erhält man:

Seien $g_j(\mathbf{r})$ die normierten Eigenfunktionen, d.h.

$$\Delta g_j = \lambda_j g_j$$

$$g_j = 0 \text{ auf } \mathcal{R} \text{ (extrapolierter Reaktorrand)}$$

so bilden die g_j ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem. Nun wird nach den g_j entwickelt:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_j a_j(t) g_j(\mathbf{r})$$

$$I(\mathbf{r}, t) = \sum_j b_j(t) g_j(\mathbf{r})$$

$$X(\mathbf{r}, t) = \sum_j c_j(t) g_j(\mathbf{r})$$

und in (3.1) und (3.2) eingesetzt. Multiplikation mit g_k und Integration über das Reaktorvolumen ergibt unter Verwendung der Orthogonalitätsrelation

$$\int_V g_j g_l dV = \delta_{jl}$$

ein Gleichungssystem (Differentialgleichungen) für die Koeffizienten $a_j(t)$, $b_j(t)$ und $c_j(t)$.

Um die Linearisierung zu erhalten, geht man vom Störungsansatz aus:

$$\phi(u, t) = \phi^*(u) + \psi(u, t)$$

$$I(u, t) = I^*(u) + i(u, t)$$

$$X(u, t) = X^*(u) + x(u, t)$$

Erst dann wird nach den g_j entwickelt

$$\psi(u, t) = \sum_j a_j(t) g_j(u)$$

$$(5.1) \quad i(u, t) = \sum_j b_j(t) g_j(u)$$

$$x(u, t) = \sum_j c_j(t) g_j(u)$$

Einsetzen von (5.1) in (3.1) und (3.2) und Subtraktion der stationären Gleichungen liefert:

$$0 = D\Delta(\sum_j a_j g_j) + (vF - \Sigma) \sum_j a_j g_j - \sigma \phi \sum_j c_j g_j$$

$$- \sigma X \sum_j a_j g_j - \sigma (\sum_j c_j g_j) (\sum_j a_j g_j)$$

$$\sum_j \dot{b}_j g_j = y_i F \sum_j a_j g_j - c_i \sum_j b_j g_j$$

$$\sum_j \dot{c}_j g_j = y_x F \sum_j a_j g_j + c_i \sum_j b_j g_j - c_x \sum_j c_j g_j - \sigma X \sum_j a_j g_j$$

$$- \sigma \phi \sum_j c_j g_j - \sigma (\sum_j a_j g_j) (\sum_j c_j g_j)$$

Nun wird linearisiert, d.h. kleine Größen zweiter Ordnung werden vernachlässigt (man setzt $(\sum a_j g_j)(\sum a_j g_j) = 0$, wobei im einzelnen noch die Berechtigung nachzuprüfen ist).

Multiplikation mit g_1 und Integration über das Reaktorvolumen ergibt mit den folgenden Abkürzungen

$$A_{j1} = \int_V v F(u) - \sum (u) g_j(u) g_1(u) dV$$

$$B_{j1} = \int_V \phi g_j g_1 dV$$

$$G_{j1} = \int_V X g_j g_1 dV$$

$$D_{j1} = \int_V F g_j g_1 dV$$

das Gleichungssystem

$$0 = D \sum_j \lambda_j \delta_{j1} + \sum_j A_{j1} a_j - \sigma \sum_j B_{j1} c_1 - \sigma \sum_j C_{j1} a_j$$

$$\dot{b}_j \delta_{j1} = y_i \sum_j a_j D_{j1} - c_i \sum_j b_j \delta_{j1}$$

$$\dot{c}_j \delta_{j1} = y_x \sum_j a_j D_{j1} + c_i \sum_j b_j \delta_{j1} - c_1 \sum_j c_j \delta_{i1}$$

$$- \sigma \sum_j a_j C_{j1} - \sigma \sum_j c_j B_{j1}$$

Die übliche und einfachste Behandlung dieses Gleichungssystems ergibt sich aus der Annahme der völligen Entkopplung der Moden, d.h.

$$A_{j1} = B_{j1} = C_{j1} = D_{j1} = 0 \quad \text{für } j \neq 1$$

(siehe [32]).

Genauer ist es jedoch, die obigen Matrizen A, B, C, D als 5 oder 7 reihige Bandmatrizen zu betrachten, da die Elemente der

Matrizen mit größerem $|j-1|$ klein werden, d.h. die Kopplung zweier Moden ist umso kleiner, je weiter sie auseinanderliegen.

Es gibt auch Untersuchungen darüber, daß höhere Oberschwingungen stabil sind [15] .

b) natürliche Moden

Unter natürlichen Moden versteht man die Eigenfunktionen des ungestörten Reaktors bei Vernachlässigung der verzögerten Neutronen

$$(D\Delta + \nu F - \Sigma)g_j = \omega_j g_j$$

$$g_j = 0 \text{ auf } \mathcal{R}$$

Die g_j sind biorthogonal (siehe etwa [29]).

Sie besitzen nicht die Finalitätseigenschaft [13] , d.h. hat man sich für m Glieder der Reihe entschieden und möchte dann $(m+1)$ Glieder haben, so sind alle neu zu berechnen.

Reihen ohne Finalitätseigenschaft besitzen also eine Abhängigkeit von der Anzahl der Glieder.

Diese Kopplung vermeiden die Kaplan-Moden (siehe e).

c) Lambda-Moden (λ -Moden)

Die λ -Moden sind die Eigenfunktionen des statischen Neutronenoperators

$$(D\Delta + \Sigma)g_j = \lambda_j g_j$$

$$g_j = 0 \text{ auf } \mathcal{R}$$

Sie besitzen die Finalitätseigenschaft nicht. Es sind auch wenig praktische Anwendungen bekannt.

d) Kaplan-Moden

Kaplan-Moden sind Vektoreigenfunktionen unter Berücksichtigung der Jod- und der Xenongleichung [15] .

Seien $\phi^*(\mu)$, $I^*(\mu)$, $X^*(\mu)$ die stationären Verläufe, so erhält man mittels des Störansatzes

$$\phi(\mu, t) = \phi^*(\mu) + \psi(\mu, t)$$

$$I(\mu, t) = I^*(\mu) + i(\mu, t)$$

$$X(\mu, t) = X^*(\mu) + x(\mu, t)$$

und anschließender Linearisierung die Definitionsgleichung der Kaplan-Moden:

$$\begin{pmatrix} D\Delta + vF - \Sigma - \sigma X & 0 & -\sigma\phi \\ y_i F & -c_i & 0 \\ y_x F - \sigma X & +c_i & -c_x - \sigma\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ g_{3m} \end{pmatrix} = w_m \begin{pmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ g_{3m} \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Kaplan-Moden ist dadurch schwieriger geworden, daß die bei der Diskretisierung entstehende Matrix eine dreifach größere Dimension benutzt.

Jedoch folgt aus der Finalitätseigenschaft, daß das anschließend entstehende Gleichungssystem für die einzelnen Moden entkoppelt ist; das bedeutet, daß jeder Mode einzeln geregelt werden kann, ohne daß damit die anderen Eigenfunktionen gestört werden [13] .

§ 6. Stabilität

Eine mathematisch strenge Theorie der Stabilität findet man bei Sansone [36], Malkin [19] und Hahn [8].

Diese Theorie ist nur bedingt auf die praktische Anwendung bei Reaktormodellen tauglich. Zunächst bezieht sie sich nur auf lineare bzw. linearisierte Probleme. Außerdem sind diese Stabilitätsbegriffe nicht adäquat zur Beschreibung der tatsächlichen Vorgänge im Reaktor. Die Stabilitätstheorie beschreibt nämlich das globale Verhalten von Lösungen, während man bei physikalischem Reaktor am Verhalten der Lösungen in überschaubaren Zeiträumen interessiert ist. Weiterhin sind die Regelparameter aus technologischen Gründen nur innerhalb gewisser Grenzen variabel.

Überträgt man den theoretischen Stabilitätsbegriff auf den Reaktor, dann entstehen etwa die folgenden Fragen:

- a) Bleiben alle Änderungen von ϕ, I und X klein, falls eine kleine Änderung der Anfangswerte von ϕ, I oder X stattfindet ?
(Ljapunoff-Stabilität)
- b) Bleiben alle Änderungen auch nach beliebig langer Zeit klein, falls eine kleine Änderung der Anfangswerte hervorgerufen wird ?
(Asymptotische Stabilität)
- c) Falls eine kleine Änderung der Anfangswerte eine kleine Änderung des Verlaufes bewirkt, bleiben dann auch bei beliebig großer Änderung der Anfangswerte nach unendlich langer Zeit die Lösungen nahe beisammen ? (Asymptotische Stabilität im Großen)

Über die Stabilität des Reaktors sind Untersuchungen durchgeführt worden [4, 10, 32, 40]. In [31] wird der Begriff der Ljapunoff-Stabilität benutzt und in [4] wird die Frage beantwortet, bei welchem Feedback (quadratische Flußrückkopplung) noch asymptotische Stabilität zu erreichen ist.

Eine für das Reaktormodell sinnvolle Stabilität kann wie folgt charakterisiert werden:

Gibt es bei gegebenem Regelbereich eine Regelung, die

- a) den Fluß in gegebenen Grenzen hält,
- b) entstandene Instabilitäten asymptotisch zum Abklingen bringt ?

Dazu entstehen die Fragen:

- c) Gibt es einen Bereich der Anfangswerte, in dem Störungen abklingen ?
- d) Gibt es einen Bereich der Anfangswerte, in dem Störungen bei gegebenem Regelbereich ausgeregelt werden können ?

Im folgenden soll am Beispiel eines Plattenreaktors dennoch auf die Ljapunofftheorie eingegangen werden und zwar aus 3 Gründen:

- 1) Die Theorie ist relativ einfach anzuwenden und man erhält auch leicht deutbare Ergebnisse.
- 2) Wenngleich sie keine quantitativen Aussagen liefert, so können doch qualitative Ergebnisse erzielt werden. Z.B., daß durch die Vergrößerung der Reaktordimensionen die Tendenz zur Instabilität zunimmt.
- 3) Sie liefert eine negative Auslese: ein Reaktor, der Ljapunoffinstabil ist, kann in keinem Sinne stabil sein.

Ausgangspunkt ist das Gleichungssystem (3.1), (3.2), (3.3) mit $u = 0$

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad 0 &= D\Delta\phi + \left(\frac{V}{K} F - \Sigma - \sigma X\right)\phi \\
 \dot{I} &= y_i F\phi - c_i I \\
 \dot{X} &= y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma \cdot X \cdot \phi
 \end{aligned}$$

Seien ϕ^*, I^*, X^* die stationären Lösungen.
Mit dem Ansatz ¹⁾

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^* + \phi_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \\ (6.2) \quad I &= I^* + I_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \\ X &= X^* + X_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H}\end{aligned}$$

erhält man nach dem Einsetzen in (6.1) und nach Abspalten des stationären Falles

$$\begin{aligned}0 &= -D\phi_0 e^{st} \frac{\pi^2}{H^2} \cos \frac{\pi x}{H} + \left(\frac{\nu}{k} F - \Sigma\right) \phi_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \\ &\quad - \sigma X \phi_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} - \sigma X_0 \phi e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \\ I_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} &= y_i F \phi_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} - c_i I_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \\ x_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} &= y_x F \phi_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} + c_o I_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \\ &\quad - c_x X_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} - \sigma X \phi_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \\ &\quad - \sigma \phi X_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} - \sigma X_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} \phi_0 e^{st} \cos \frac{\pi x}{H} .\end{aligned}$$

Linearisierung und Kürzen mit e^{st} führt zu

¹⁾ Nach [4] ist diese Annahme zu vertreten für Reaktoren, deren Dimension (z.B. Höhe oder Breite) < 12 m beträgt. Dann nämlich ist die Kopplung der einzelnen Schwingungsformen zu vernachlässigen und die Oberschwingungen sind stabiler.

$$\begin{aligned}
0 &= -D\phi_0 \frac{\pi^2}{H^2} \cos \frac{\pi x}{H} + \left(\frac{\nu}{k} F - \Sigma\right) \phi_0 \cos \frac{\pi x}{H} \\
&\quad - \sigma X \phi_0 \cos \frac{\pi x}{H} - \sigma X_0 \phi \cos \frac{\pi x}{H} \\
sI_0 \cos \frac{\pi x}{H} &= y_i F \phi_0 \cos \frac{\pi x}{H} - c_i I_0 \cos \frac{\pi x}{H} \\
sX_0 \cos \frac{\pi x}{H} &= y_x F \phi_0 \cos \frac{\pi x}{H} + c_i I_0 \cos \frac{\pi x}{H} + c_x X_0 \cos \frac{\pi x}{H} \\
&\quad - \sigma X \phi_0 \cos \frac{\pi x}{H} - \sigma \phi X_0 \cos \frac{\pi x}{H}
\end{aligned}$$

Multipliziert man alle Ausdrücke mit $\frac{2}{H} \cos \frac{\pi x}{H}$ und integriert über die Plattendicke H , so erhält man mit den folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\frac{2}{H} \int_0^H F(x) \sin^2 \frac{\pi x}{H} dx &= F_1 \\
\frac{2}{H} \int_0^H \Sigma(x) \sin^2 \frac{\pi x}{H} dx &= \Sigma_1 \\
(6.3) \quad \frac{2}{H} \int_0^H X(x) \sin^2 \frac{\pi x}{H} dx &= X_1 \\
\frac{2}{H} \int_0^H \phi(x) \sin^2 \frac{\pi x}{H} dx &= \phi_1
\end{aligned}$$

das Ergebnis

$$(6.4) \quad 0 = -D\phi_0 \frac{\pi^2}{H^2} + \frac{\nu}{k} \phi_0 F_1 - \phi_0 \Sigma_1 - \sigma \phi_0 X_1 - \sigma X_0 \phi_1$$

$$(6.5) \quad sI_0 = y_i \phi_0 F_1 - c_i I_0$$

$$(6.6) \quad sX_0 = y_x \phi_0 F_1 + c_i I_0 - \sigma \phi_0 X_1 - \sigma \phi_1 X_0$$

Aus (6.5) erhält man

$$I_o = \frac{y_i F_1}{s + c_i} \phi_o.$$

Dieses in (6.6) eingesetzt ergibt

$$X_o = \frac{y_x F_1 + c_i \frac{y_i F_1}{s + c_i} - \sigma x_1}{s + c_x + \sigma \phi_1} \phi_o$$

Damit erhält man aus (6.4) nach Potenzen von s geordnet das quadratische Polynom:

$$K_1 s^2 + K_2 s + K_3 = 0$$

mit
$$K_1 = -\frac{\pi^2 D}{H^2} + v F_1 - \Sigma_1 - \sigma X_1$$

$$K_2 = K_1 (c_i + c_x + \sigma \phi_1) - \sigma \phi_1 (y_x F_1 - \sigma X_1)$$

$$K_3 = -\sigma \phi_1 c_i F_1 (y_i + y_x) - \sigma X_1 + K_1 c_i (c_x + \sigma \phi_1).$$

Legt man der Untersuchung die Daten eines stationären Reaktors zugrunde, so ist der Reaktor Ljapunoff-stabil, falls s negativen Realteil besitzt. Aus den hiermit durchgeführten Untersuchungen ergab sich, daß der folgende Datensatz einen besonders schwingungsintensiven Reaktor darstellt. Er wurde einem Teil der später durchgeführten Untersuchungen zugrunde gelegt.

$$v = 2,5$$

$$\sigma = 1,5 \cdot 10^{-18} \left[\text{cm}^2 \right]$$

$$D = 1,3 \left[\text{cm} \right]$$

$$F = 10^{-2} \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

$$H = 512 \left[\text{cm} \right]$$

$$\Sigma_a = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ (ortsabhängig) } \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$$

$$\phi_{\text{mittel}} = 2 \cdot 10^{13} \text{ (sinusförmig) } \left[\frac{1}{\text{sec} \cdot \text{cm}^2} \right]$$

Kap. III REGELUNG

§ 7. Auswahl des Kriteriums

Aufgabe der Regelung der Xenon-Transienten ist es, durch Steuerungsmaßnahmen dafür zu sorgen, daß zu große Schwankungen vermieden werden.

Als Maß für die Flußschwankung wird die Abweichung von einer vorgegebenen Funktion $N(r,t)$ angenommen.

Da das Nachführen des Flusses nach einer sich zeitlich verändernden Funktion zu Schwingungen führen kann, ist es sinnvoll N zeitunabhängig zu wählen

$$N(r,t) = N(r).$$

I.a. wird man sogar für $N(r)$ die stationäre Flußverteilung $\phi^*(r)$ wählen.

Die Abweichungen sind positiv zu messen, das Kriterium muß also positiv definit sein.

Von der Regelung beeinflusst sind auch noch I und X . Außerdem sollen auch die Regelmaßnahmen in Grenzen gehalten werden. Es ist also zu fordern, daß ϕ, u, I und X vom Optimalitätskriterium erfaßt werden.

Es gibt zwei wesentliche Typen von Optimalitätskriterien

- a) die schnelligkeitsoptimale Regelung oder Endwertregelung,
- b) die integrale Regelung mit festem Endzeitpunkt.

Eine schnelligkeitsoptimale Regelung ist z.B.:

vom Reaktorzustand $I_0(r,0)$, $X_0(r,0)$, $\phi_0(r,0)$ ist mit $|u(r,t)| < u_{\max}(r,t)$ der Zustand $I_E(r,t_E)$, $X_E(r,t_E)$, $\phi_E(r,t_E)$ mit minimalem t_E zu erreichen.

Solche Endwertregelungen haben den Nachteil, daß oft große Schwankungen nichteingeschränkter Parameter zu Erreichung des

Optimums führen, was reaktorphysikalisch nicht erwünscht ist.

Vorzuziehen sind deshalb die integralen Kriterien [42,46] , in denen das zu optimierende Funktional ein Zeitintegral ist, z.B.:

Im Bereich $[0, T]$, T fest, ist $u(r, t)$ gesucht, so daß

$$(7.1) \quad J = c_1^2 \cdot \int_0^T \int_V \phi_s^2 dV dt + c_2^2 \cdot \int_0^T \int_V I_s^2 dV dt \\ + c_3^2 \cdot \int_0^T \int_V X_s^2 dV dt + c_4^2 \cdot \int_0^T \int_V u_s^2 dV dt$$

mit

$$\phi_s = \phi(r, t) - N(r)$$

$$I_s = I(r, t) - M(r)$$

$$X_s = X(r, t) - P(r)$$

$$u_s = u(r, t) - U(r)$$

minimal wird.

(Andere positiv definite Funktionen führen zu sehr komplizierten und meist unlösbaren Problemen).

Die Anwendung des Kriteriums (7.1) setzt voraus, daß alle Größen zeitlich und räumlich bekannt, d.h. meßbar, sind.

Für den Fluß und die Regelabsorption ist dies zu erreichen, wenn auch meist nicht direkt [12] . Somit besteht aus praktischen Gründen die Konsequenz

$$c_2^2 \equiv 0$$

$$c_3^2 \equiv 0.$$

O.B.d.A. ist $U = 0$ zu setzen, da von der vorhandenen Absorption $\Sigma + u$ nur u ins Funktional eingeht.

Durch die Normierung $c_1 \equiv 1$ ergibt sich mit $c_4^2 = k^2$ insgesamt

$$(7.2) \quad J = \int_0^T \int_V \left[\left\{ \phi(\underline{r}, t) - N(\underline{r}) \right\}^2 + k^2 \cdot u^2(\underline{r}, t) \right] dV dt.$$

§ 8. Methode

Es ist also das folgende Problem zu lösen

$$(8.1) \quad J = \int_0^T \int_V \left[(\phi - N)^2 + k^2 u^2 \right] dV dt = \text{Min}$$

mit den Nebenbedingungen

$$0 = D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi$$

$$(8.2) \quad \dot{I} = y_i F\phi - c_i I$$

$$\dot{X} = y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi$$

und den Rand- und Anfangswerten

$$\phi(\mu, t) = 0 \quad \text{für } \mu = \mathcal{R} \quad (\text{extrapolierter Reaktorrand})$$

$$I(\mu, 0) = I_0(\mu)$$

$$X(\mu, 0) = X_0(\mu)$$

Nach dem Maximumprinzip [21, 29] bilden wir mittels der Lagrange-schen Multiplikatorfunktionen $\omega_1(\mu, t)$, $\omega_2(\mu, t)$, $\omega_3(\mu, t)$ aus (8.1) die erweiterte Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H = & -(\phi - N)^2 - k^2 u^2 + \omega_1 (D\Delta\phi + (vF - \Sigma - \sigma X)\phi - u\phi) \\ & + \omega_2 (y_i F\phi - c_i I) + \omega_3 (y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X \phi) \end{aligned}$$

Aus der Forderung

$$\frac{\delta H}{\delta u} = 0$$

ergibt sich

$$(8.3) \quad u_0 = -\frac{\omega_1 \phi}{2k^2}.$$

Nun ist

$$H_0 = H(u_0),$$

also

$$\begin{aligned} H_0 = & -(\phi - N)^2 + \frac{\omega_1^2 \phi^2}{4k^2} + \omega_1 D\Delta\phi + \omega_1 (\nu F - \Sigma - \sigma X)\phi \\ & + \omega_2 (y_i F\phi - c_i I) + \omega_3 (y_x F\phi + c_i I - c_x X - \sigma X\phi) \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\delta H_0}{\delta \omega_1} \quad \frac{\delta H_0}{\delta \omega_2} \quad \text{und} \quad \frac{\delta H_0}{\delta \omega_3}$$

reproduzieren sich die Ausgangsgleichungen (8.2).

Und für die adjungierten Gleichungen gilt

$$\begin{aligned} -\dot{\omega}_1 &= \frac{\delta H_0}{\delta \phi} = -2(\phi - N) + \omega_1^2 \phi \frac{1}{2k^2} + \frac{\delta}{\delta \phi} (\omega_1 D\Delta\phi) \\ &\quad + (\nu F - \Sigma - \sigma X) \omega_1 + \omega_2 y_i F + \omega_3 y_x F - \omega_3 \sigma X \\ -\dot{\omega}_2 &= \frac{\delta H_0}{\delta I} = -c_i \omega_2 + c_i \omega_3 \\ -\dot{\omega}_3 &= \frac{\delta H_0}{\delta X} = -\omega_1 \sigma \phi - c_x \omega_3 - \omega_3 \sigma \phi \end{aligned}$$

Die Separation der Kritikalitätsregelung (aus der formal $\dot{\phi} = 0$ folgt) hat auch $\dot{\omega}_1 = 0$ zur Folge.

Benutzt man noch die Beziehung

$$\int_V (\omega_1 \Delta\phi - \phi \Delta\omega_1) dV = \int_{\mathcal{R}} \left(\omega_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \omega_1}{\partial n} \right) df,$$

so ergibt sich wegen der natürlichen Randbedingung

$$\omega_1(r, t) = 0 \quad \text{für} \quad r = \mathcal{R}$$

aus (8.4)

$$0 = D\Delta\omega_1 + (\nu F - \Sigma - \sigma X) \omega_1 + \omega_1^2 \phi \frac{1}{2k^2} \\ - 2(\phi - N) + \omega_2 y_i F + \omega_3 y_x F - \omega_3 \sigma X$$

Insgesamt erhält man also das System

$$(8.5) \quad \begin{aligned} 0 &= \Delta\phi + A\phi - K\phi^2\psi \\ 0 &= \Delta\psi + A\psi - K\psi^2\phi + p\phi + c \end{aligned}$$

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= y_i F\phi - c_i I \\ \dot{X} &= y_x F\phi + c_i I - X(c_x + \sigma\phi) \end{aligned}$$

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \dot{\omega}_2 &= c_i \omega_2 - c_i I \\ \dot{\omega}_3 &= -\sigma\phi\psi + \omega_3(c_x + \sigma\phi) \end{aligned}$$

mit den folgenden Abkürzungen

$$\psi = -\omega_1$$

$$A = \frac{1}{D} (\nu F - \Sigma - \sigma X)$$

$$K = \frac{1}{2k^2}$$

$$p = \frac{2}{D}$$

$$C = \frac{1}{D} (-2N - \omega_2 y_i F - \omega_3 y_x F + \omega_3 \sigma X)$$

und den Rand- und Anfangswerten

$$\phi(\mu, t) = 0 \quad \forall t$$

$$\psi(\mu, t) = 0 \quad \forall t$$

$$I(\mu, 0) = I_0(\mu)$$

$$X(\mu, 0) = X_0(\mu)$$

$$\omega_2(\mu, T) = 0$$

$$\omega_3(\mu, T) = 0$$

Nach der Lösung dieses gekoppelten partiellen nichtlinearen Differentialgleichungssystems ergibt sich die optimale Regelung aus (8.3) zu

$$(8.8) \quad u_{\text{opt}} = K \cdot \phi \cdot \psi$$

§ 9. Lösung des Gleichungssystems

Im Gleichungssystem (8.5) (8.6) (8.7) erkennt man, daß die Gleichungen (8.5) die Zeit explizit nicht enthalten, daß (8.6) gewöhnliche Differentialgleichungen mit Anfangswerten und (8.7) solche mit Endwerten sind.

Wir betrachten zunächst das System (8.5)

$$(9.1) \quad 0 = \Delta\phi + A\phi - K\phi^2\psi$$

$$(9.2) \quad 0 = \Delta\phi + A\psi - K\psi^2\phi + p\phi + C$$

und setzen A, K, p und C als bekannt voraus.

Der Gleichungstyp $\Delta\phi + B^2\phi = c^2\phi^2$ hat in letzter Zeit vermehrte Beachtung gefunden [37,38,39] .

In passender Erweiterung zu [39] können für das System Lösungsmethoden angegeben werden.

Seien Startvektoren ϕ_0, ψ_0 bekannt, so wird wie folgt iteriert:

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \Delta\phi_{v+1} + k_v^{(1)} \phi_{v+1} + k_v^{(2)} \psi_{v+1} &= r_v \\ \Delta\psi_{v+1} + k_v^{(4)} \phi_{v+1} + k_v^{(3)} \psi_{v+1} &= s_v \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} r_v &= k_v^{(1)} \phi_v + k_v^{(2)} \psi_v - A\phi_v + K\phi_v^2\psi_v \\ s_v &= k_v^{(4)} \phi_v + k_v^{(3)} \psi_v - A\psi_v + K\phi_v\psi_v^2 - p\phi_v - C \end{aligned}$$

und

$$(9.4) \quad \begin{aligned} k_v^{(1)} &= k_v^{(3)} = A - 2K\phi_v\psi_v \\ k_v^{(2)} &= -K\phi_v^2 \\ k_v^{(4)} &= p - K\psi_v^2 \end{aligned}$$

Die Iteration bricht ab, falls

$$\max_{\mu, t} (\phi_{v+1} - \phi_v, \psi_{v+1} - \psi_v) < \varepsilon_1$$

oder

$$\max_{\mu, t} \left(\frac{\phi_{v+1} - \phi_v}{\phi_v}, \frac{\psi_{v+1} - \psi_v}{\psi_v} \right) < \varepsilon_2$$

oder

$$\int_0^T \int_V \left[\left(\frac{\phi_{v+1} - \phi_v}{\phi_v} \right)^2 + \left(\frac{\psi_{v+1} - \psi_v}{\psi_v} \right)^2 \right] dV dt < \varepsilon_3$$

Das Verfahren (9.3) (9.4) ist außerordentlich wirkungsvoll.

Bei geschickter Programmierung ergab sich bei 5 Stellen Genauigkeit eine mittlere Iterationsanzahl von weniger als 4.

Es ergab sich lokale Konvergenz, jedoch ist durch Modifikation der k -Werte in (9.4) (Verwendung von $\phi_{\min}, \phi_{\max}, \psi_{\min}, \psi_{\max}$) globale Konvergenz zu erreichen. Dann allerdings steigt die Zahl der Iterationen an, weshalb damit keine umfangreichen Tests durchgeführt wurden.

Dieser inneren Iteration ist eine Iteration der Gleichungen (8.6) und (8.7) überlagert.

Sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_L = T$ (Laufindex k) so wird berechnet

$$\begin{aligned} I(t_{k+1}) - I(t_k) &= \Delta t_k \left[y_i F\phi(t_k) - c_i I(t_k) \right] \\ (9.5) \quad X(t_{k+1}) - X(t_k) &= \Delta t_k \left[y_x F\phi(t_k) + c_i I(t_k) - c_x X(t_k) \right. \\ &\quad \left. - X(t_k)\phi(t_k) \right] \end{aligned}$$

für $k = 1, 2, \dots, L$ und alle Ortsstützstellen.

und

$$\begin{aligned}
 \omega_2(t_{k+1}) - \omega_2(t_k) &= \Delta t_k \left[c_i \omega_2(t_{k+1}) - c_i \omega_3(t_{k+1})' \right] \\
 (9.6) \quad \omega_3(t_{k+1}) - \omega_3(t_k) &= \Delta t_k \left[-\sigma \phi(t_{k+1}) \quad \psi(t_{k+1}) + \right. \\
 &\quad \left. \omega_3(t_{k+1})(c_x + \sigma \phi(t_{k+1})) \right]
 \end{aligned}$$

für $k = L-1, L-2, \dots, 1$ und alle Ortsstützstellen.

Zum besseren Verständnis ist die Ortsindizierung in (9.5) und (9.6) weggelassen worden.

Wegen $c_i > 0$ und $c_x + \sigma \phi > 0$ ist die verwendete explizite Berechnung numerisch stabil.

Die Gesamtiteration zeigt nur lokale Konvergenz, jedoch ist der interessierende Parameterbereich im Konvergenzgebiet enthalten.

Zur Berechnung der Startwerte ϕ_0, ψ_0 gehen wir davon aus, daß ϕ um N nur wenig schwankt und wählen $\phi_0 = N \quad \forall t$ und $\forall \kappa$.

Die zum zeitlich konstanten Fluß benötigte Regelung ist aus (3.3) zu erhalten

$$(9.7) \quad \tilde{u} = \frac{1}{N} D \Delta N + vF - \Sigma - \sigma X_0$$

und aus (8.8) ergibt sich

$$(9.8) \quad \psi_0 = \frac{1}{K} \frac{\tilde{u}}{N}$$

Den Gleichungen (9.7) und (9.8) ist besondere Aufmerksamkeit zu schenken:

a) $N(\kappa)$ ist so zu wählen, daß $\frac{\Delta N}{N}$ am Rande nicht singulär wird, d.h. die vorgegebene Flußverteilung ist auf dem Reaktorrand mit endlichem Buckling zu wählen.

b) ψ_0 darf am Rande nicht singulär werden. Dies ist zwar physikalisch keine Einschränkung, jedoch muß dem Randübergang von Σ im Rahmen der Schrittweite Beachtung geschenkt werden.

Kap. III. ERGEBNISSE

§ 10. Ausgangsdaten

Zwischen $F(u)$, $\Sigma(u)$ und $\phi^*(u)$ besteht ein Zusammenhang. Setzt man nämlich (4.2) in (3.3) ein, so ergibt sich

$$(10.1) \quad D\Delta\phi^* + (vF - \Sigma - \sigma \frac{y_i + y_x}{c_x + \sigma\phi^*} F\phi^*)\phi^* = 0.$$

Bei gegebenen F und Σ ist es prinzipiell möglich, ϕ^* aus (10.1) zu berechnen. Andererseits ist aber der Fluß aus Diffusionsrechnungen ohne Xenonterm zu bestimmen (durch Iteration auch in Übereinstimmung mit dem Xenonterm). Um zu garantieren, daß (10.1) erfüllt ist, setzen wir F und ϕ^* (das natürlich aus Σ berechnet sein kann) voraus, und berechnen daraus Σ zu

$$(10.2) \quad \Sigma = \frac{1}{\phi^*} D\Delta\phi^* + vF - \sigma \frac{y_i + y_x}{c_x + \sigma\phi^*} \phi^*.$$

Falls $\phi^* = N$, bezeichnen wir Σ aus (10.2) mit Σ^* , und erhalten

$$(10.3) \quad \Sigma^* = \frac{1}{N} D\Delta N + vF - \sigma \frac{y_i + y_x}{c_x + \sigma N} N$$

In der abschließenden Parameterstudie werden 2 Fälle unterschieden:

- 1) $\Sigma_{\text{eff}} = \Sigma$ (wobei Σ_{eff} die in (3.1) effektiv vorhandene Absorption ist).

d.h. im stationären Betrieb ist keine Regelung vorhanden, bzw. die Messung des Regelaufwandes für das Funktional geschieht von der Marke aus, die den stationären Zustand anzeigt.

Der Vorteil dieser Methode ist, daß der stationäre Zustand keinen Beitrag zum Funktional leistet und darum auch zum Endzeitpunkt angenommen wird.

Als Nachteil erkennt man leicht, daß ein Herausziehen der Regelstäbe oberhalb des stationären Zustandes das Funktional vergrößert, was nicht im Sinne des Funktionals als Straffunktion ist.

$$2) \Sigma_{\text{eff}} = (1-\alpha)\Sigma \quad (\text{z.B. mit } \alpha(\omega) \leq 5 \%)$$

$\alpha(\omega)$ ist so gewählt, daß der Regelmeßbereich bei herausgezogenen Stäben beginnt, d.h. $u(\omega, t) > 0$.

Der Nachteil dieser Methode ist, daß der vorher angegebene stationäre Fall nicht das Ziel der Optimierung ist. Das bedeutet wiederum, daß der Endzustand Ausgangspunkt neuer Schwingungen sein kann.

Ihr Vorteil ist, daß jede Verringerung der Regelabsorption das Funktional verkleinert.

Ein mathematischer Vorteil ist, daß die Eindeutigkeit für das Verfahren leichter zu zeigen ist.

Im Anhang werden die folgenden ausgewählten Fälle gezeigt:

	A	B	C	D
	1)		2)	
Plattendicke H [cm]	512		640	
ν	2,5		2,42	
σ [cm ²]	$1,5 \cdot 10^{-18}$		$0,98 \cdot 10^{-18}$	
D [cm]	1,3		1,57	
mittlerer Fluß (sinusförmig) $\left[\frac{1}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \right]$	$2 \cdot 10^{13}$		$1,2 \cdot 10^{14}$	3)
F $\left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$	0,010		0,0016	
Leistungsdichte ⁴⁾ $\left[\frac{\text{MW}}{\text{m}^3} \right]$	6,5		> 6,5	
T [Std]	60		50	
α	$\sim 5 \%$		5 %	0 %
2K [cm ² sec ²]	10^{-33}	10^{-32}	$2 \cdot 10^{-36}$	
$c_i \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$	$2,1 \cdot 10^{-5}$			
$c_x \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$	$2,94 \cdot 10^{-5}$			
y_i [1]	0,0625			
y_x [1]	0,002			
Ortsintervalle	32			
Zeitintervalle	32			

1) siehe § 6

2) dem PR 500 angepaßter Plattenreaktor

3) bei abgeflachteren Profilen steigt der mittlere Fluß bis zu $2 \cdot 10^{14}$ an.

4) bei unendlicher ausgedehnter Platte, d.h. ohne seitliche Leakage.

§ 11. Beschreibung der Ergebnisse

Für die Fälle A,B zeigen die Abbildungen¹⁾ 1-3 die Verläufe von $N(u)$, $F(u)$ und $\Sigma^*(u)$. In Abbildung 4 ist die effektive Absorption $\Sigma_{\text{eff}}(u)$ gezeichnet, und $u^*(u) = \Sigma^* - \Sigma_{\text{eff}}$ ist in Abbildung 5 dargestellt.

Die Abbildungen 7 und 8 zeigen die stationären Jod- und Xenonverläufe $I^*(u)$ und $X^*(u)$.

Wie weit jedoch die optimale Regelung von der reinen Xenongegensteuerung abweicht, ist aus $R(u,t) = \sigma \cdot X(u,t) + u(u,t)$ ersichtlich, dessen stationärer Verlauf $R^*(u)$ in Abbildung 6 wiedergegeben ist.

Die verwendeten Anfangswerte für Jod und Xenon (Abb. 9,10 und 11,12 mit kontinuierlichem Übergang) ergeben, daß die Abhängigkeit von I- und X-Anfangswerten nur gering ist.

Bei den 3-D-Bildern werden zur besseren Anschaulichkeit nur die Abweichung vom stationären Verlauf wiedergegeben.

Auf dem extrapolierten Rand wurde die Nulllinie gezeichnet (d.h. alle Größen werden für $x = 0$ und für $x = H$ als stationär angenommen). Als Sockel wurde das Minimum der Funktionswerte gewählt. Dieses Minimum wurde zur Größenvorstellung bei jedem Sockel angegeben, jedoch nicht dort, wo die Fläche den Sockel berührt.

Die Ergebnisse findet man für

Fall	2K	ohne Regelung	Regelung	nach der Regelung
A	10^{-33}	in Abb. 13-15	Abb. 16-20	Abb. 21-23
B	10^{-32}		Abb. 24-28	Abb. 29-31

¹⁾ Abbildungen des Anhangs

Obgleich A das anschaulich schlechtere Ergebnis zeigt (sowohl Jod als auch Xenon besitzen zum Zeitpunkt T größere Abweichungen vom Stationären als die Verhältnisse der strafferen Regelung B), zeigt das Flußverhalten nach der Regelung bei A nur noch ein Ausschwingen, während B nach der Regelung wieder eine zunehmende Amplitude besitzt.

Daraus folgt, daß eine genaue physikalische Definition der Optimalität erforderlich ist, ehe das passende k gewählt werden kann.

Die Fälle C,D haben die qualitativ gleichen stationären Funktionen wie A,B, können also aus den Abbildungen 1-8 durch Maßstabsänderung erhalten werden. Lediglich der in Abbildung 32 dargestellte X^* -Verlauf ist anders.

Es werden dargestellt

Fall	α	Regelung
C	5 %	in Abb. 33-36
D	0 %	in Abb. 37-40

Der unregelte Fall führt hier zu einer starken Dämpfung. Eine Verflachung des Flusses (Abb. 41-44) führt jedoch sehr schnell zu instabilem Verhalten.

Da aber die Ergebnisse bei optimaler Regelung von der Flußform sehr wenig abhängen, ist hier für die Regelung ϕ^* und N sinusförmig angenommen worden.

Die Abbildungen zeigen, daß die Annahme $\Sigma_{\text{eff}} = \Sigma^*$ (Fall D) die besseren Ergebnisse zeigt, da das stationäre Bild dort für $t = T$ angenommen wird (Abb. 37-40).

Insgesamt hat sich ergeben, daß in weiten Parameterbereichen das schnelle Erreichen des stationären Zustandes den optimalen Verlauf darstellt.

L I T E R A T U R

1. ASH, M.
Optimal Shutdown Control of Nuclear Reactors.
Academic Press, New York, 1966
2. ASH, M.
Nuclear Reactor Kinetics.
Mc Graw-Hill, New York, 1965
3. BOCK, H.-W.
Ein analoges Diffusionsmodell für große Druckwasser-Leistungs-
reaktoren zur Untersuchung zeitabhängiger Probleme der Leistungs-
dichteverteilung.
Dissertation, Universität Braunschweig, 1973
4. CANOSA, J. and BROOKS, H.
Xenon-Induced Oscillations.
NSE 26, 237-253 (1966)
5. CHERNICK, J.
The Dynamics of a Xenon-Controlled Reactor.
NSE 8, 233-243 (1960)
6. DAVISON, B.
Neutron Transport Theory.
Oxford University Press (Clarendon), London, 1958
7. GLASSTONE, S. and EDLUND, M.C.
The Elements of Nuclear Reactor Theory.
Van Nostrand, London, 1962
8. HAHN, W.
Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov.
Springer-Verlag, Berlin, 1959
9. HAUBENREICH, P.N.
Power Reactor Stabilities.
Nuclear Safety 5, 354-356 (1964)

10. HENRY, A.F. and GERMANN, J.D.
Oscillations in the Power Distribution within a Reactor.
NSE 2, 469-480 (1957)
11. HOOPER, R.J., RYDIN, R.A. and STACEY, JR., W.M.
Verifikation of a Xenon Spatial Stability Criterion.
NSE 34, 344-346 (1968)
12. KALKER, K.-J.
Inverskinetische Reaktivitätsmessung an Kernreaktoren
Jül-780-RE (1971)
13. KAPLAN, S.
Synthesis Methods in Reactor Analysis.
Adv. Nucl. Sci. Techn. 3, 233-266 (1966)
14. KAPLAN, S.
The Property of Finality in the Analysis of in Reactor Space-
Time Kinetics by Various Modal Expansions.
NSE 9, 357-361 (1961)
15. KAPLAN, S. and YASINSKY, J.B.
Natural Modes of the Xenon Problem with Flow Feedback
-An Example-
NSA 25, 430-438 (1966).
16. KERR, R.E. and LENNOX, W.C.
Extending Reactor Time-to-Person by Pre-Shutdown
Power Alterations
AECL-1619 (1962).
17. LAUER, A.
Räumliche Xenon-Schwingungen in Hochtemperaturreaktoren
JÜL-850-RG (1972)
18. LEWINS, J. and BABB, A.
Optimum Nuclear Reactor Control Theory
Adv. in Nucl. Sci. and Techn. 4, 252-308 (1968)

19. MALKIN, I.G.
Theorie der Stabilität einer Bewegung
R. Oldenbourg, München, 1959
20. MEGHREBLIAN, R.V. and HOLMES, D.K.
Reactor Analysis.
Mc Graw-Hill, New York, 1960
21. MEDITEH, J.
The Pontryagin Maximum Principle and Some of Its Applications
Adv. in Contr. Systems 1, 56-74 (1964)
22. MOHLER, R.R. and SHEN, C.N.
Optimal Control of Nuclear Reactors.
Academic Press, New York, 1970
23. MOTODA, H.
Optimal Control Rod Programming of Light Water Reactors in
Equilibrium Fuel Cycle.
NSE 46, 88-111 (1971)
24. MOTODA, H. and KAWAI, T.
A Theory of Control-Rod Programming Optimization in Two-Region
Reactors.
NSE 39, 114-118 (1970)
25. NEEF, W.I.
Galahad - A Code for Optimizing Control of Xenon Transients with
Dynamic Programming
GA 9166 (1969)
26. NEUMANN, K.
Ein Verfahren zur Lösung gewisser nichtlinearer Kontrollprobleme
Computing 6, 249-263 (1970)
27. OLSSON, G.
Simplified Models of Xenon Spatial Oscillations
Atomkernenergie 16-17, 91-98 (1970)

28. PAYNE, J.A.
Computational Methods in Optimal Control Problems
Adv. in Contr. Systems 7, 79-164 (1969)
29. PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKII, X.V.G., GAMKRELIDZE, R.V. and
MISHENKO, E.F.
The Mathematical Theory of Optimum Processes
Wiley (Interscience), New York, 1962
30. RADKOWSKY, A. (ed.)
Naval Reactors Physics Handbook
USAEC, Washington, D.C., 1954
31. RAJN, G.V.S. and JOSSELSO, R.
Stability of Reactor Control Systems in Coupled Core Reactors
IEEE, Transac. Nucl. Sci. 18, 388-394 (1971)
32. RANDALL, D. and ST. JOHN, D.S.
Xenon Spatial Oscillations
Nucleonics 16, 82-86, 129 (1958)
33. ROSZTOCZY, Z.R.
Optimal Xenon Shutdown Control of Nuclear Reactors
Transactions ANS 10, 256-257 (1967)
34. ROSZTOCZY, Z.R. and WEAVER, L.E.
Optimal Reactor Shutdown Program for Minimum Xenon Buildup.
NSE 20, 318-323 (1964)
35. RYDIN, R.A.
Higher Mode Effects in Xenon Spatial Oscillation
Trans. Am. Nucl. Soc. 15, 286-287 (1972)
36. SANSONE, G. and CONTI, R.
Nonlinear Differential Equations
Pergamon Press, Oxford, 1964
37. SHAMPINE, L.F.
Some Nonlinear Eigenvalue Problems
J. Math. Mech. 17, 1065-1072 (1968)

38. --
Existence of Solutions for Certain Nonlinear Boundary Value Problems.
J. Math. Phys. 10, 1177-1178 (1969)
39. -- and WING, G.M.
Existence and Uniqueness of Solutions of a Class of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems
J. Math. Mech. 19, 971-979 (1970)
40. SHINODA, W. and MITAKE, S.
A Three-Dimensional Analysis of Xenon-Induced Oscillations in Boiling Water Cooled Reactors
NSE 36, 372-388 (1969)
41. STACEY, W.M.
Xenon Spatial Oscillations
Transac. ANS 10, 254 (1967)
42. --
Optimal Control of Xenon Power Spatial Transients
NSE 33, 162-168 (1968)
43. --
Control of Xenon Spatial Oscillations
NSE 38, 229-243 (1969)
44. --
Linear Analysis of Xenon Spatial Oscillations
NSE 30, 453-455 (1967)
45. --
A Variational Multi-Channel Space-Time Synthesis Method for Nonseparable Reactor Transients
NSE 34, 45-56 (1968)
46. --
A Nonlinear Xenon Stability Criterion for a Spatially Dependent Reactor Model
NSE 35, 395-396 (1969)

47. --
Application of the Spectral Synthesis Method to the Analysis of
Spatially Dependent Fast-Reactor Transients.
NSE 45, 221-226 (1971)
48. --
Application of Variational Synthesis to the Optimal Control of
Spatially Dependent Reactor Models
NSE 39, 226-230 (1970)
49. --
Xenon Induced Power Oscillations
Reactor Technology 13, 252-279 (1970)
50. --
Space-Time Nuclear Reactor Kinetics
Academic Press, New York, 1969
51. TERNEY, W.B.
Analytic Solution to the Flat Flux Problem
NSE 45, 226-230 (1971)
52. TERNEY, W.B. and FENECH, H.
Control Rod Programming Optimization Using Dynamic Programming
NSE 39. 109-114 (1970)
53. TEUCHERT, E., MALY, V. and HAAS, K.A.
Basisstudie zum Kugelhaufenreactor in OTTO-Beschickung
JÜL-858-RG (1972)
54. WADE, D. C. and TERNEY, W.B.
Optimal Control of Nuclear Reactor Depletion
NSE 45, 199-217 (1971)
55. WALL, I. and FENECH, H.
The Application of Dynamic Programming to Fuel Management
Optimization.
NSE 22, 285-297 (1965)

56. WEIHRICH, G.
Optimale Regelung linearer deterministischer Prozesse
Methoden der Regelungstechnik.
R. Oldenbourg Verlag, München, 1973
57. WEINBERG, A.M. and WIGNER, E.P.
The Physical Theory of Neturon Chain Reactors
University of Chicago Press, Chicago, 1958
58. WEAVER, L.E.
Reactor Dynamics and Control
Elsevier, New York, 1968
59. WEAVER, L.E.
System Analysis of Nuclear Reactor Dynamics
Rowman and Littlefield, Inc., New York, 1963
60. WIBERG, D.M.
Optimal Control of Nuclear Reactor Systems
Adv. Control Systems 5, 301-388 (1967)
61. WIBERG, D.M.
Controllability of the Spatial Flux Shape
NSE 27, 600-604 (1967)
62. WILSON, J.V.
Xenon Instabilities
Nuclear Safety 5, 345-354 (1964)

A N H A N G

Herrn R.D. Kaussen danke ich für die umfangreiche Programmier-
und Testarbeit sowie für die Erstellung der Bilder.

Abb. 1

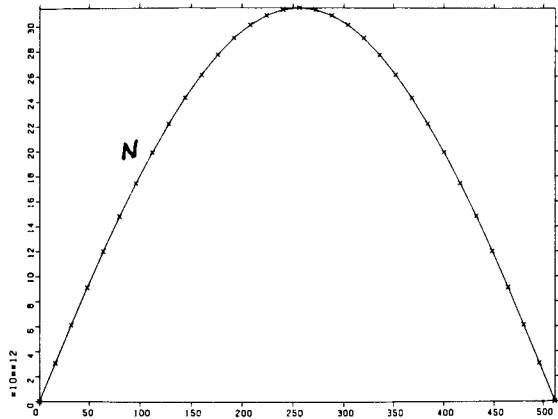


Abb. 2

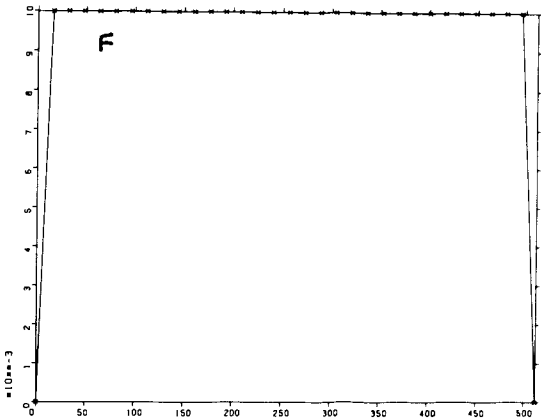


Abb. 3

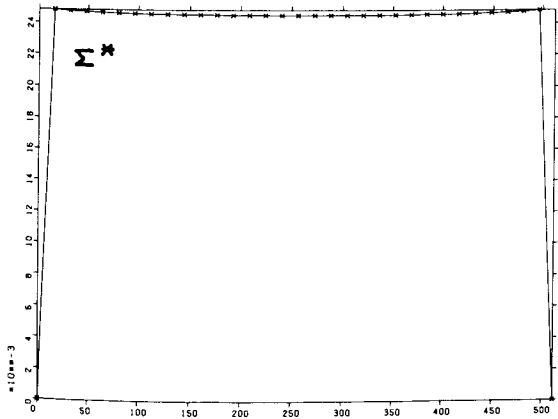


Abb. 4

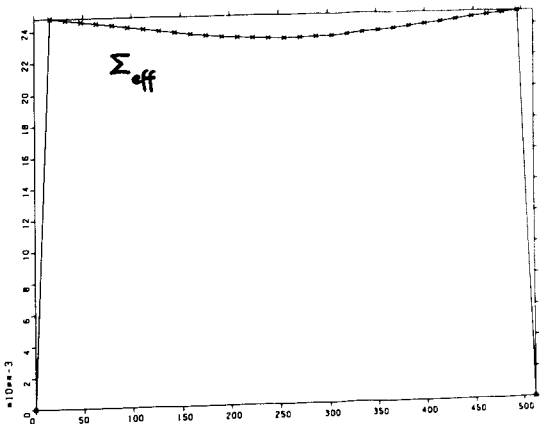


Abb. 5

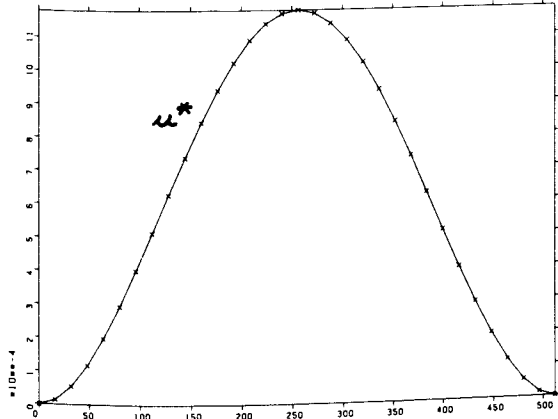


Abb. 6

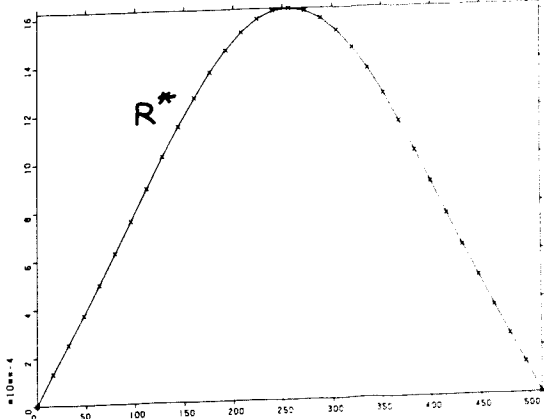


Abb. 7

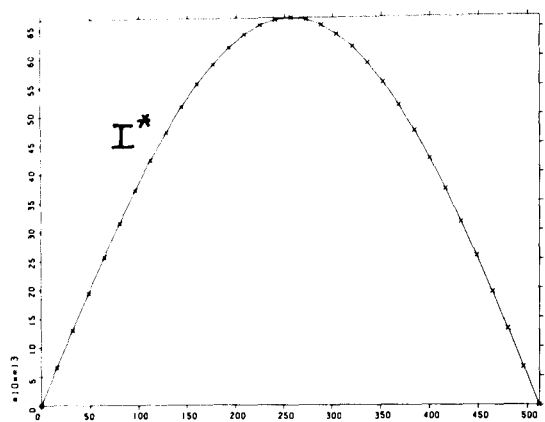


Abb. 8

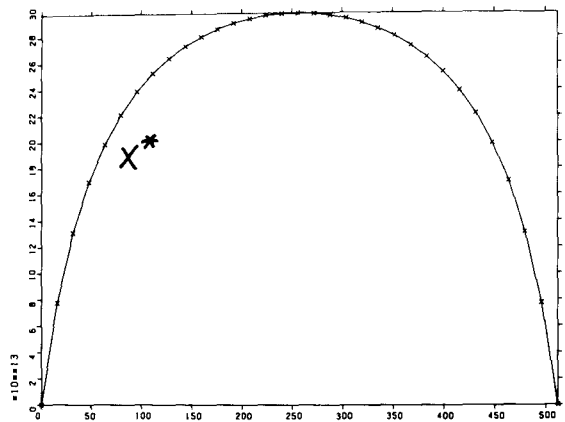


Abb. 9

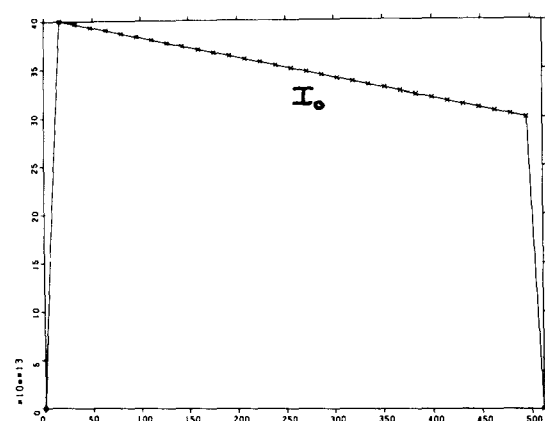


Abb. 10

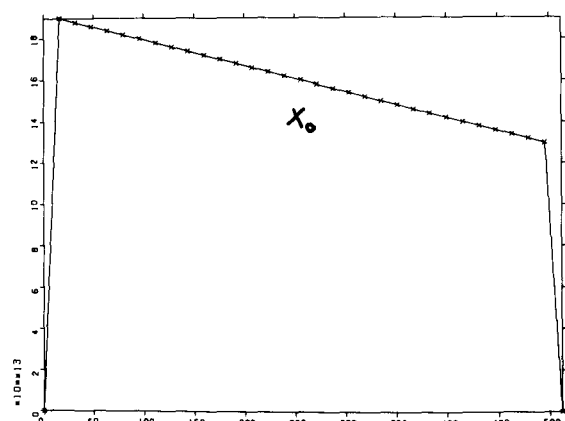


Abb. 11

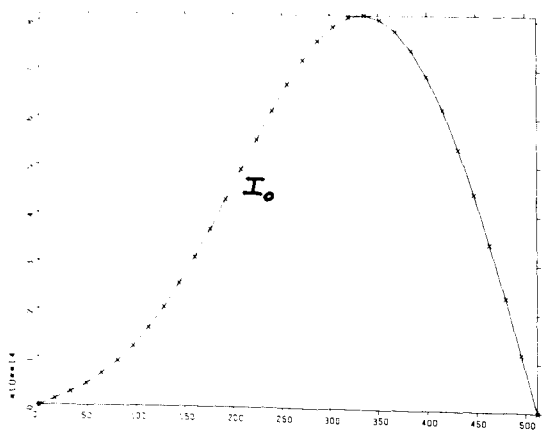
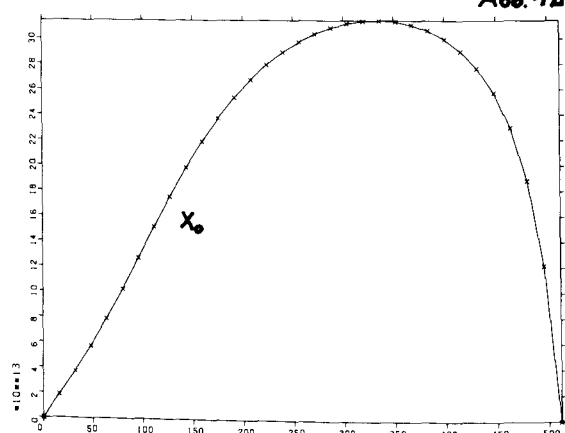


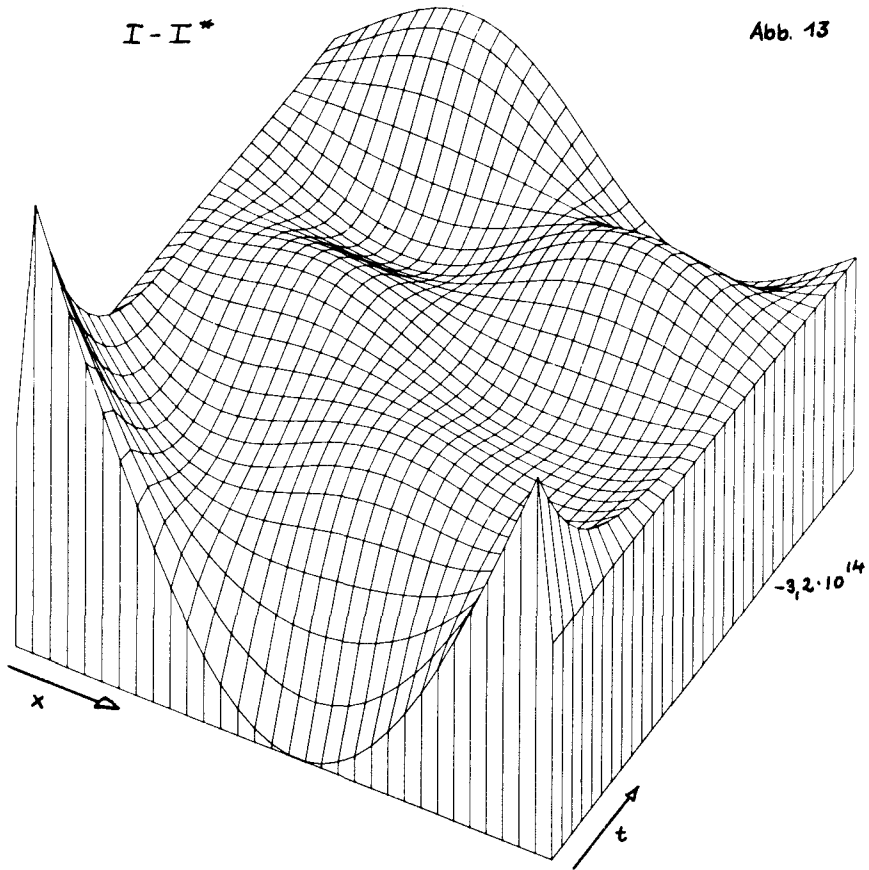
Abb. 12



$I - I^*$

Abb. 13

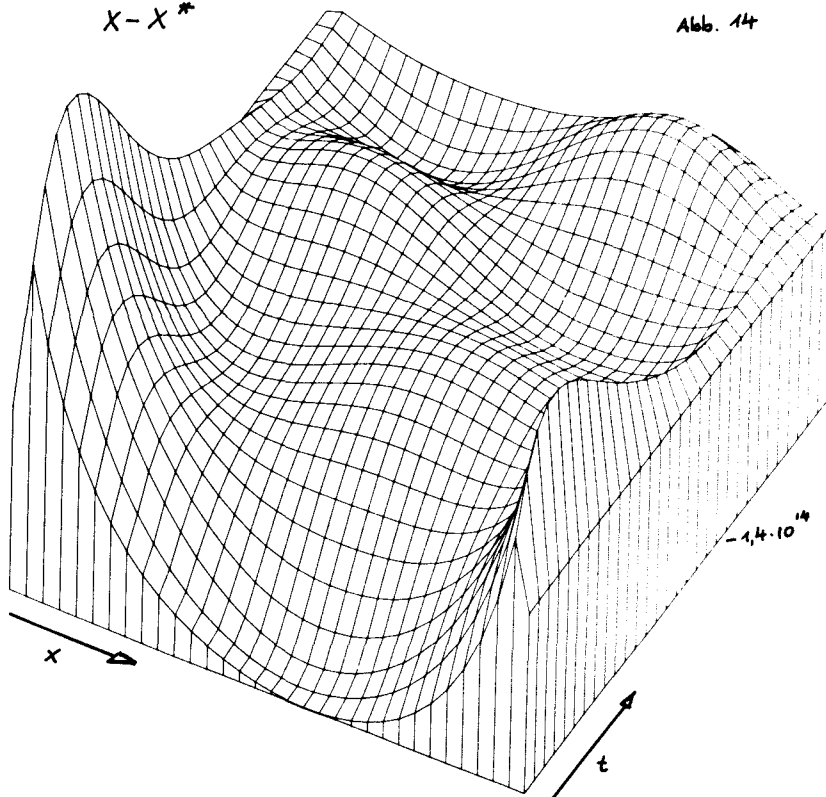
A, B
ohne

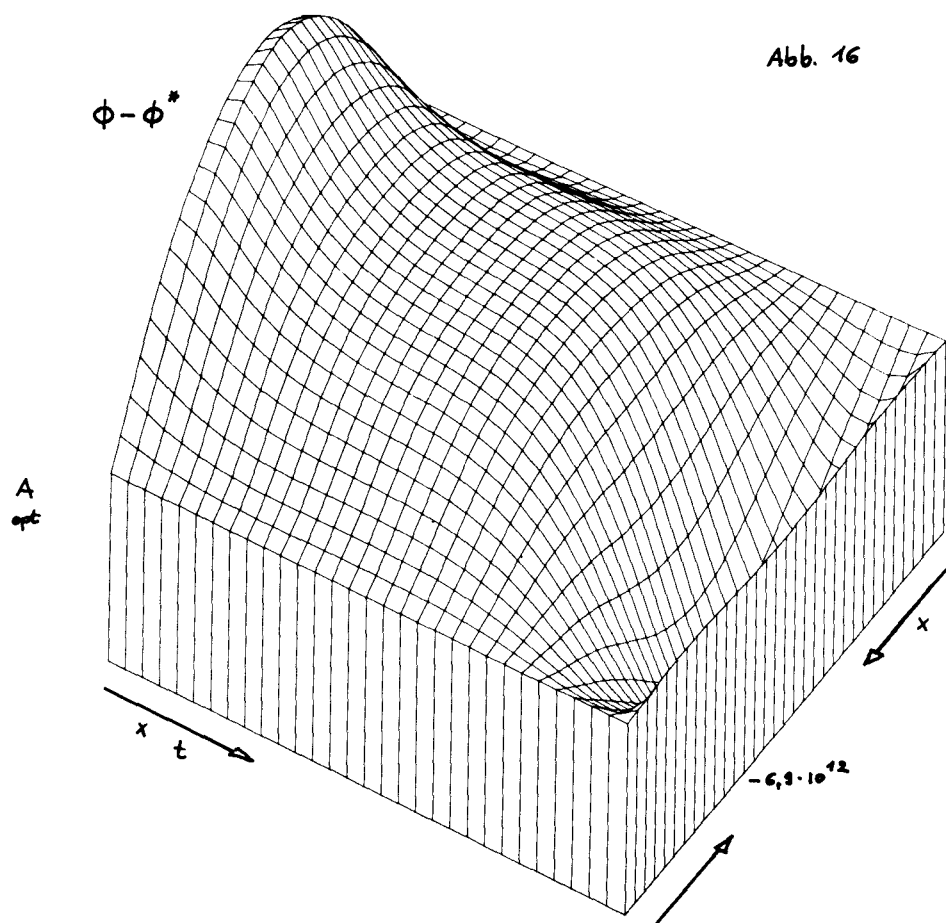
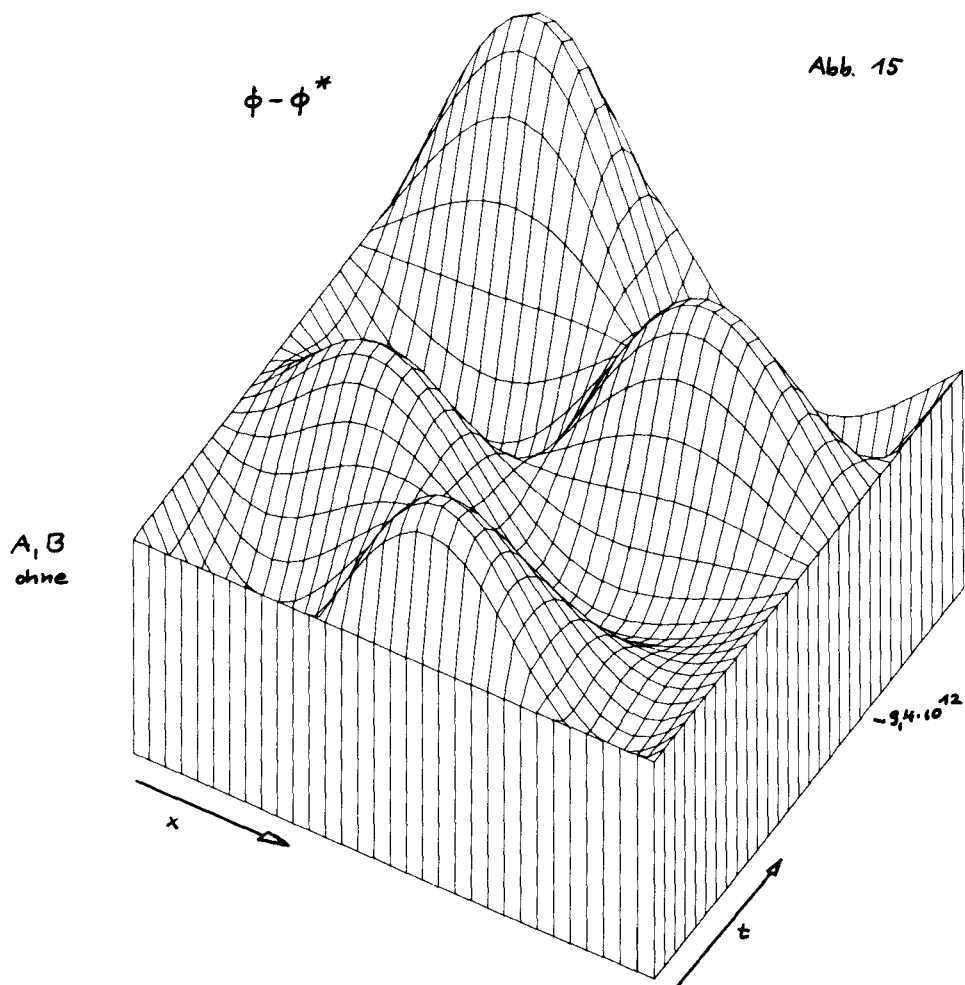


$X - X^*$

Abb. 14

A, B
ohne

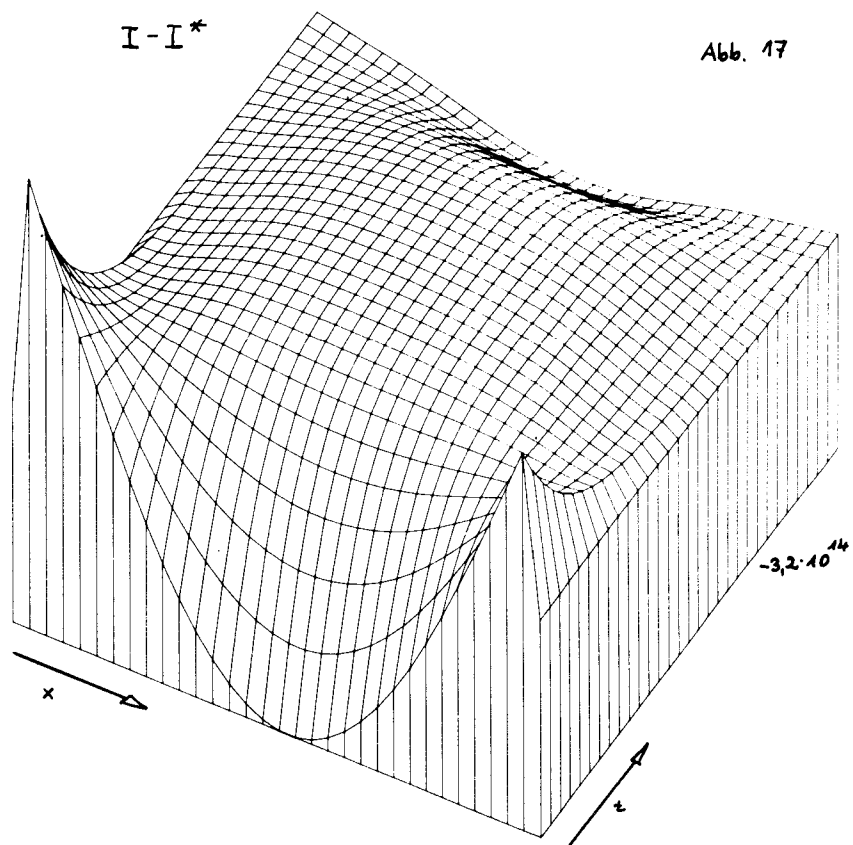




$I - I^*$

Abb. 17

A_{opt}



$X - X^*$

Abb. 18

A_{opt}

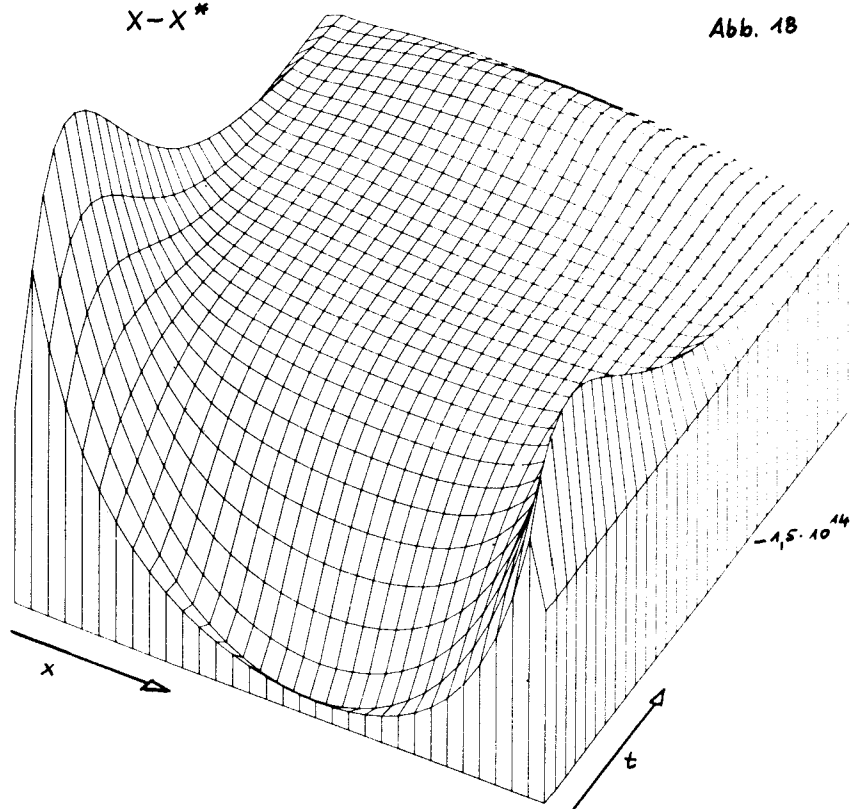


Abb. 19

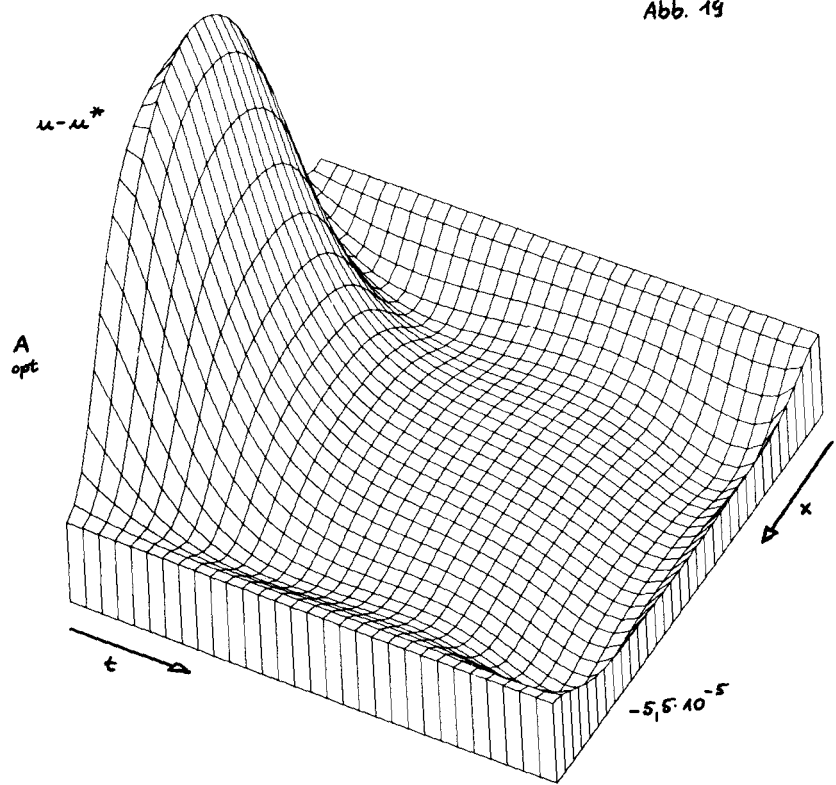
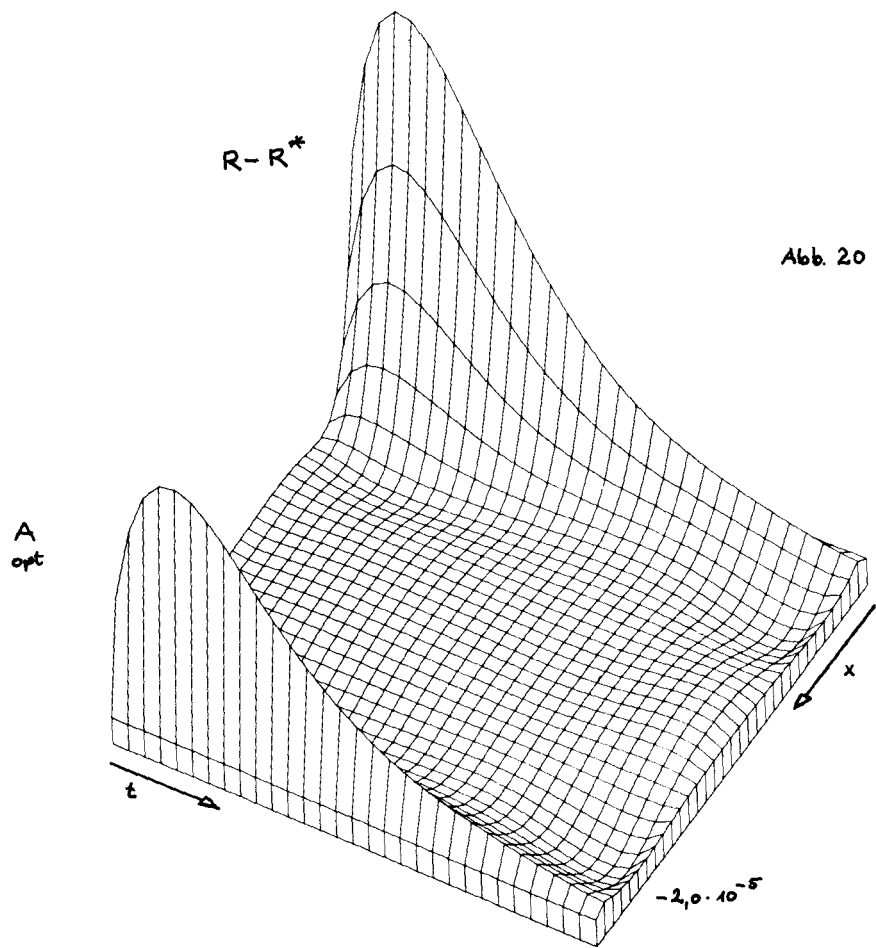
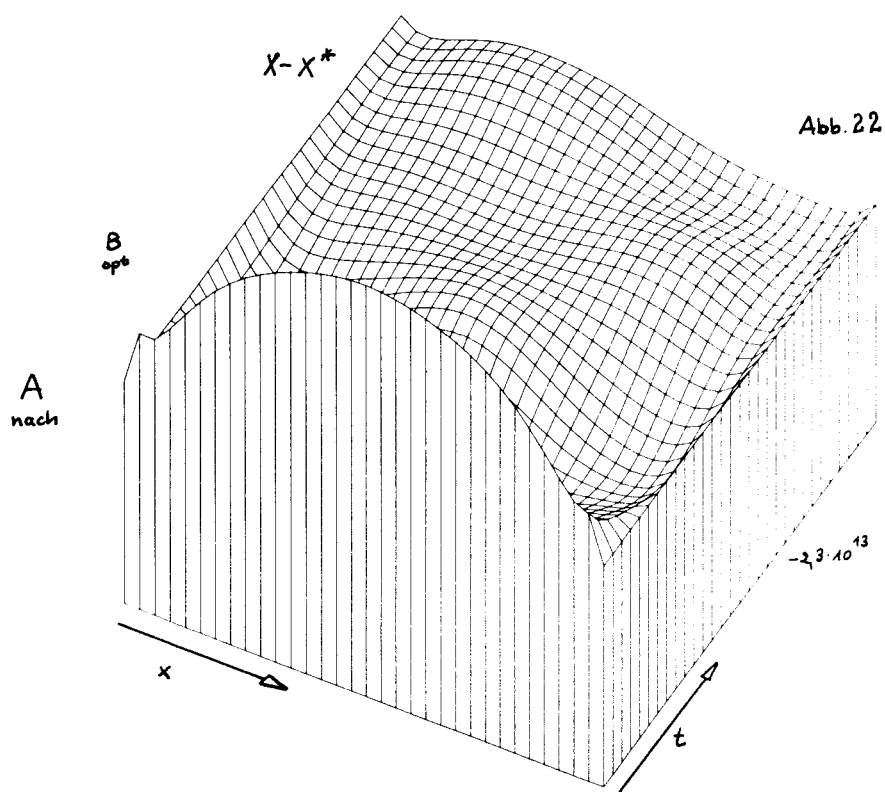
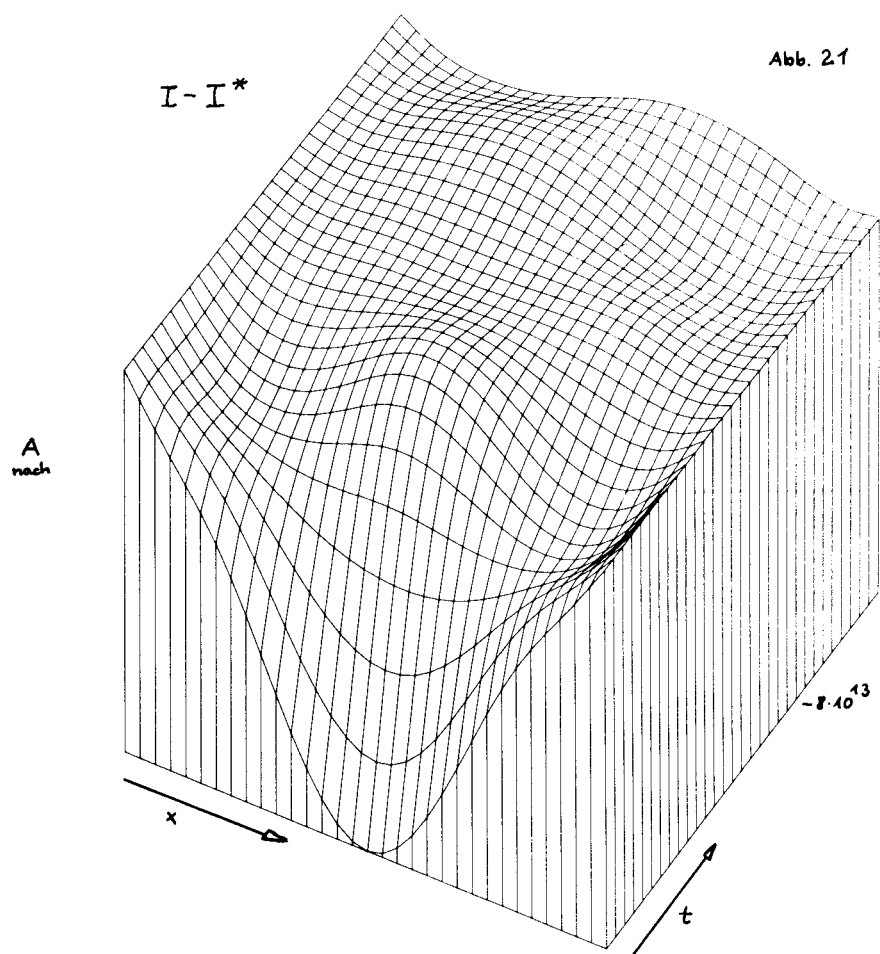
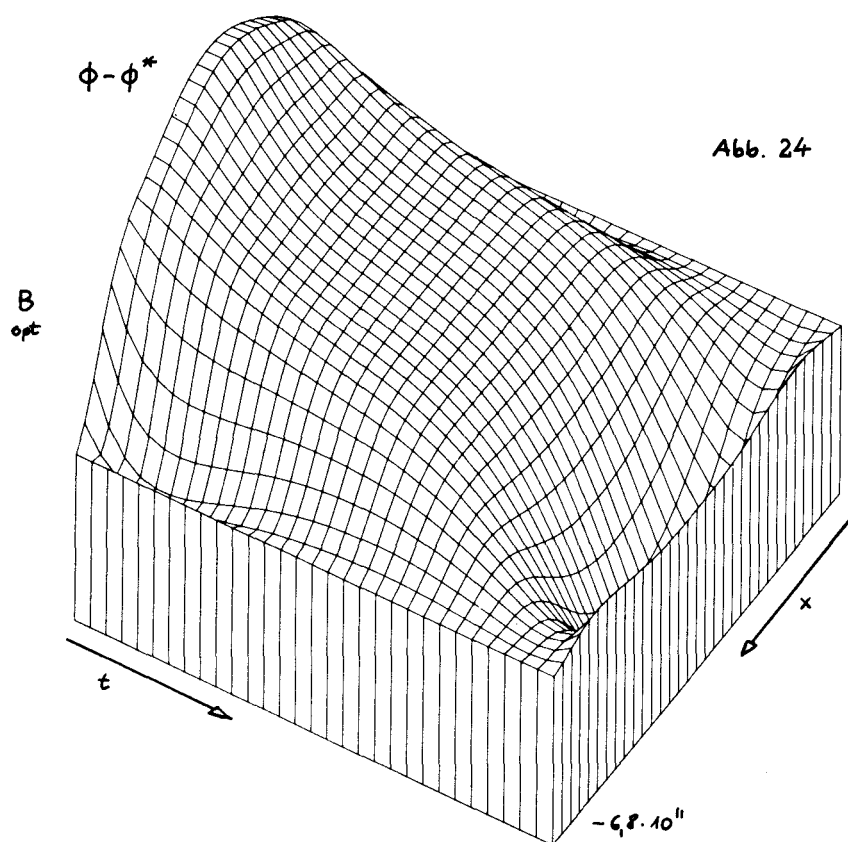
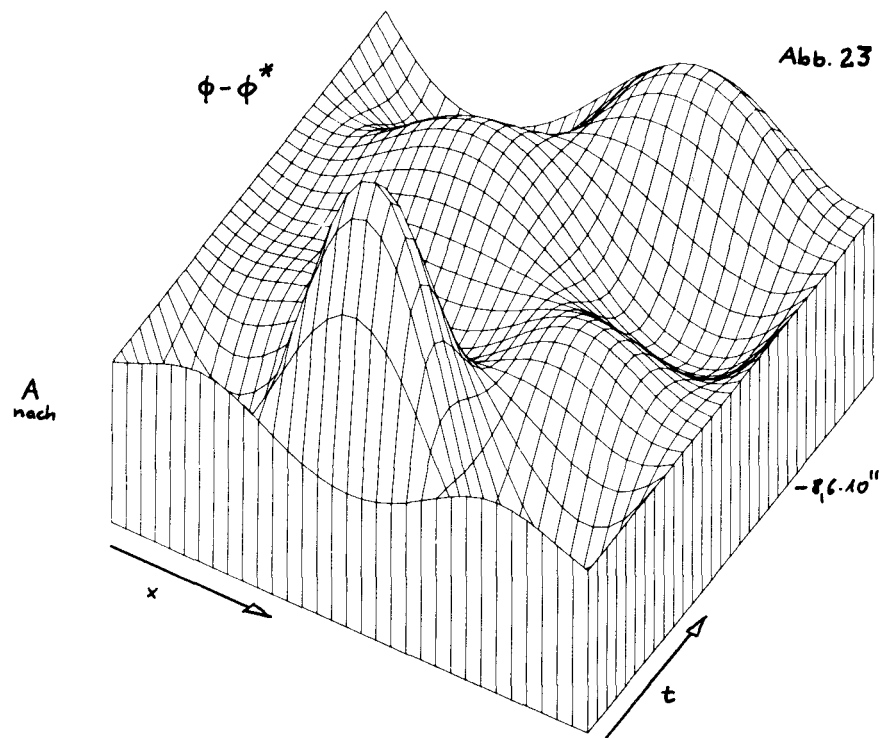


Abb. 20



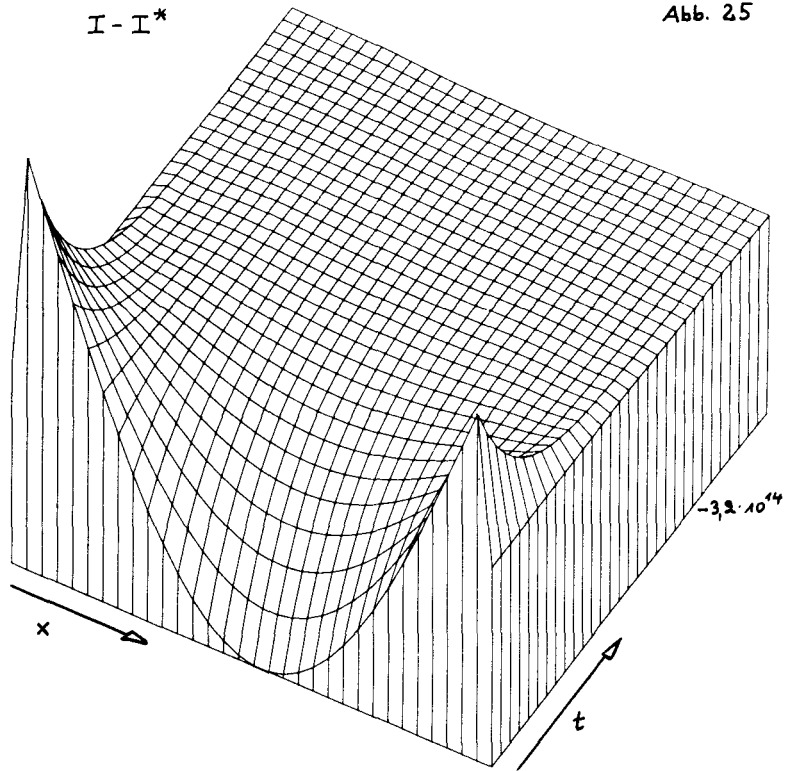




$I - I^*$

Abb. 25

B_{opt}



$X - X^*$

Abb. 27

B_{opt}

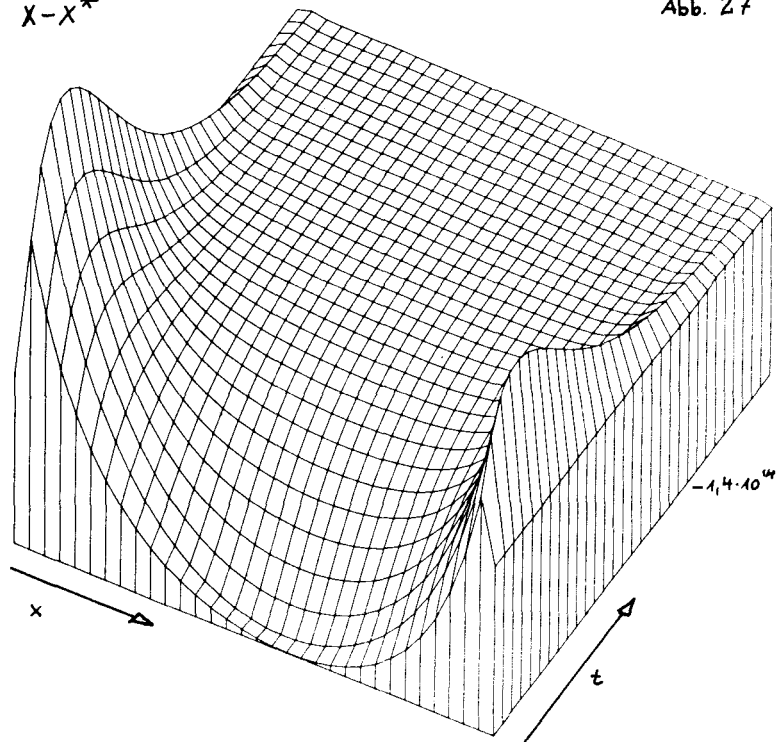


Abb. 27

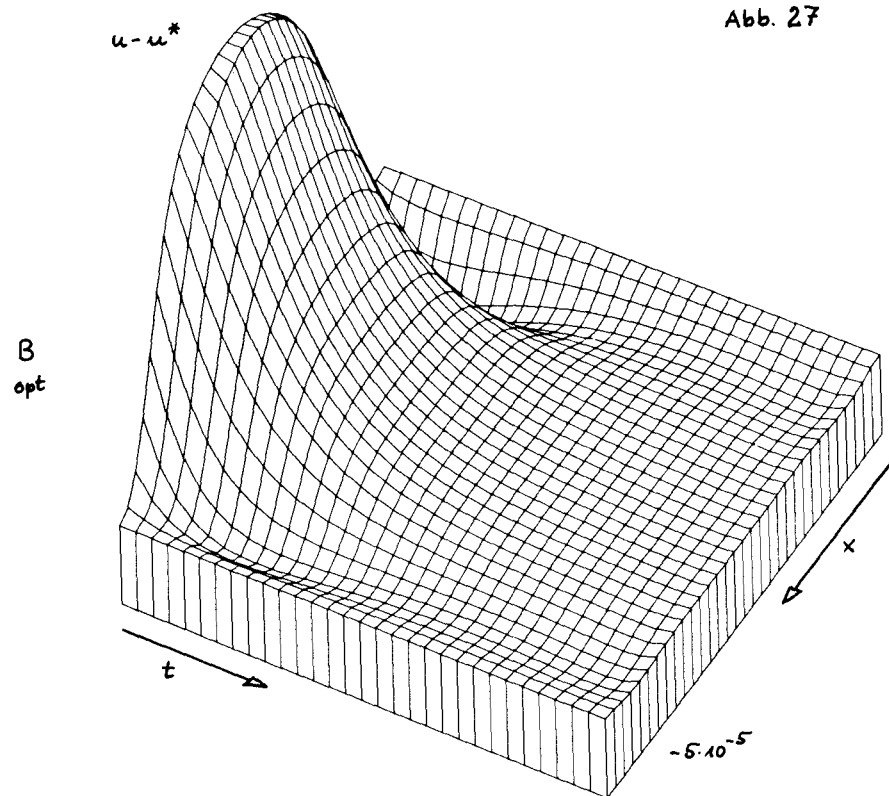


Abb. 28

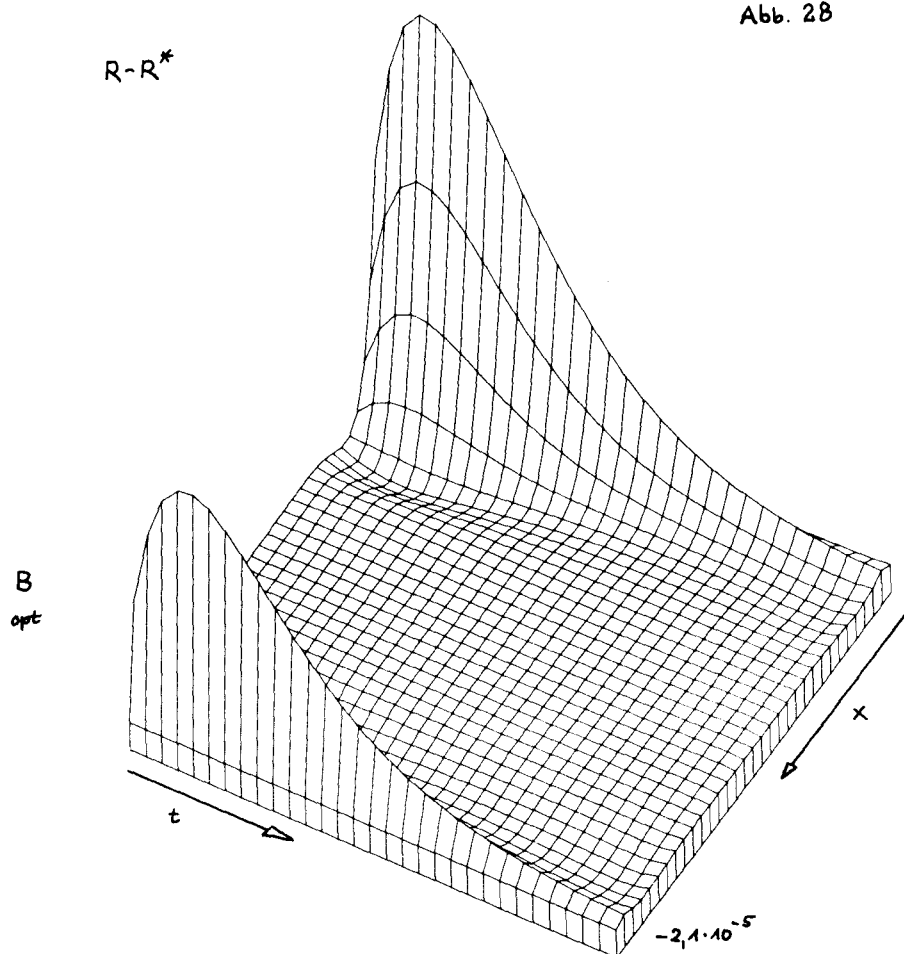


Abb. 29

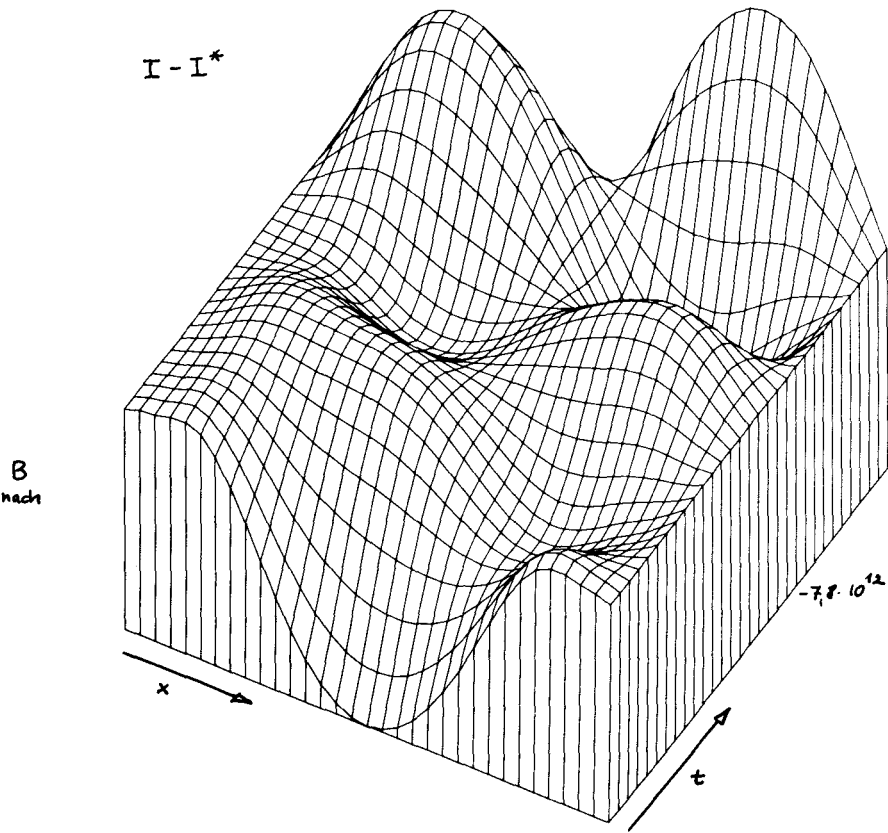


Abb. 30

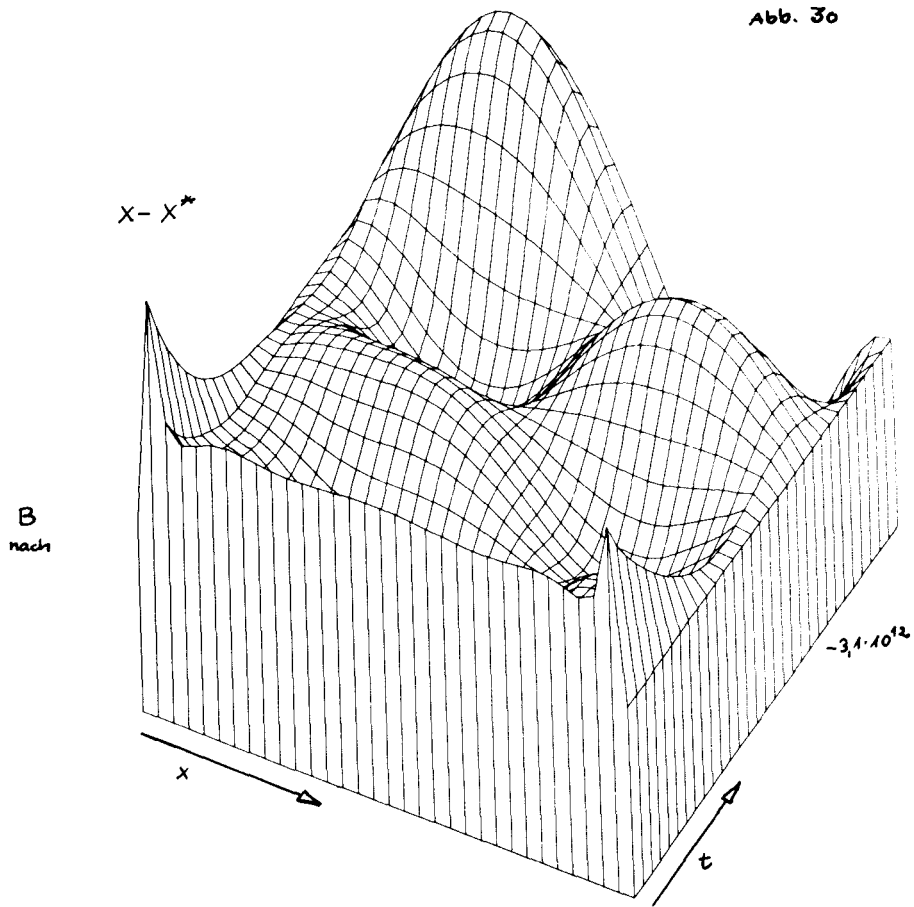


Abb. 31

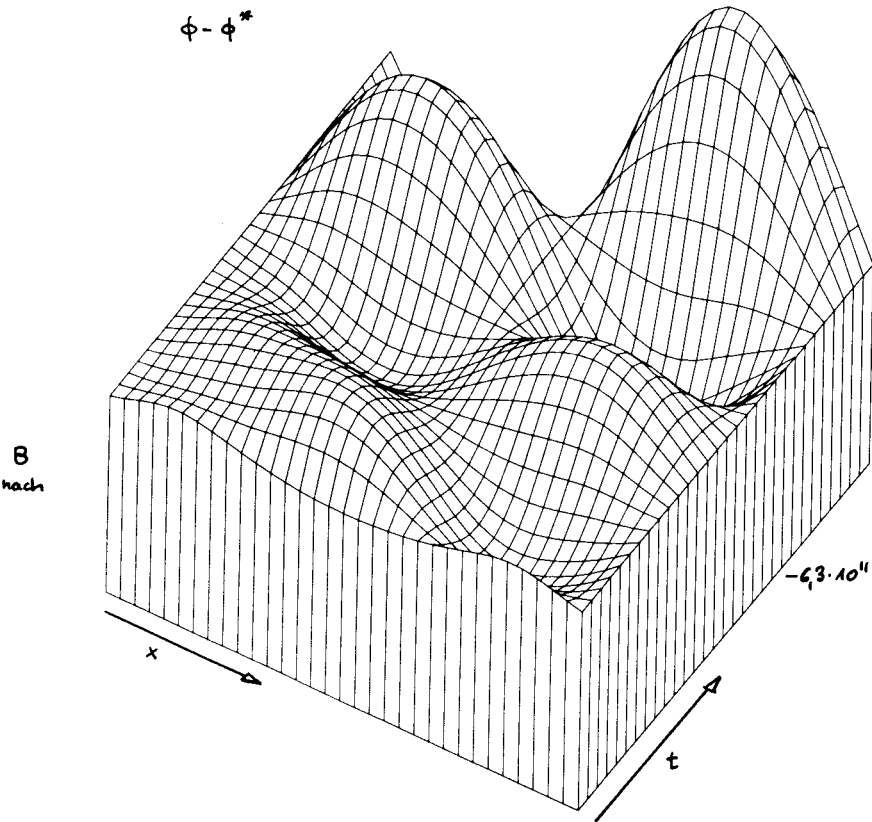


Abb. 32

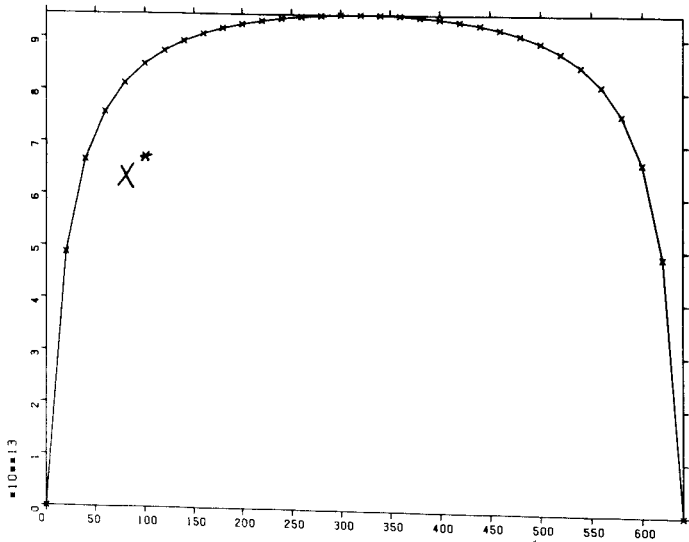


Abb. 33

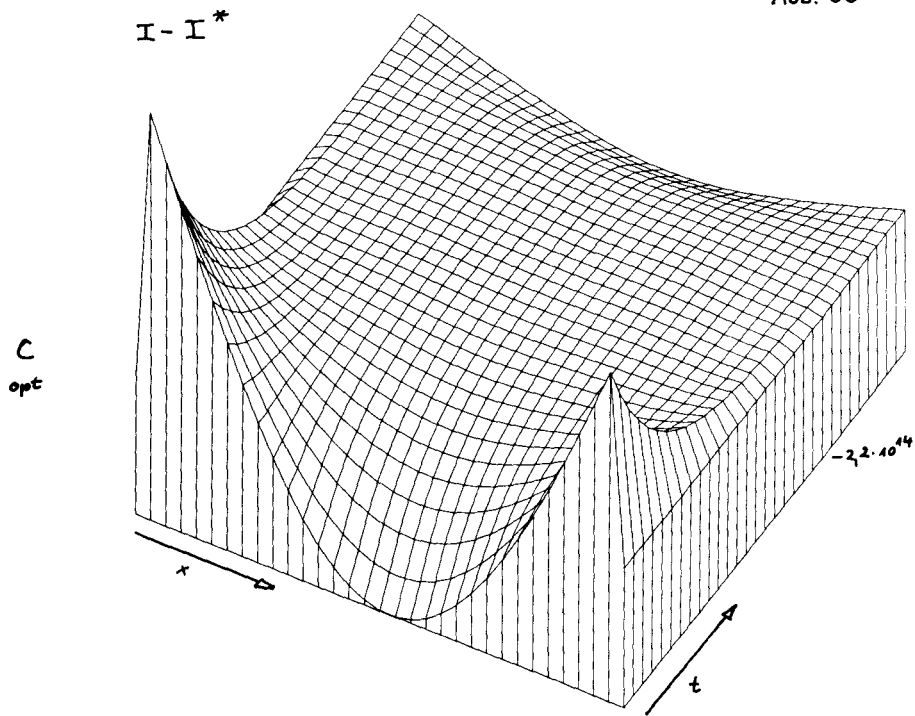


Abb. 34

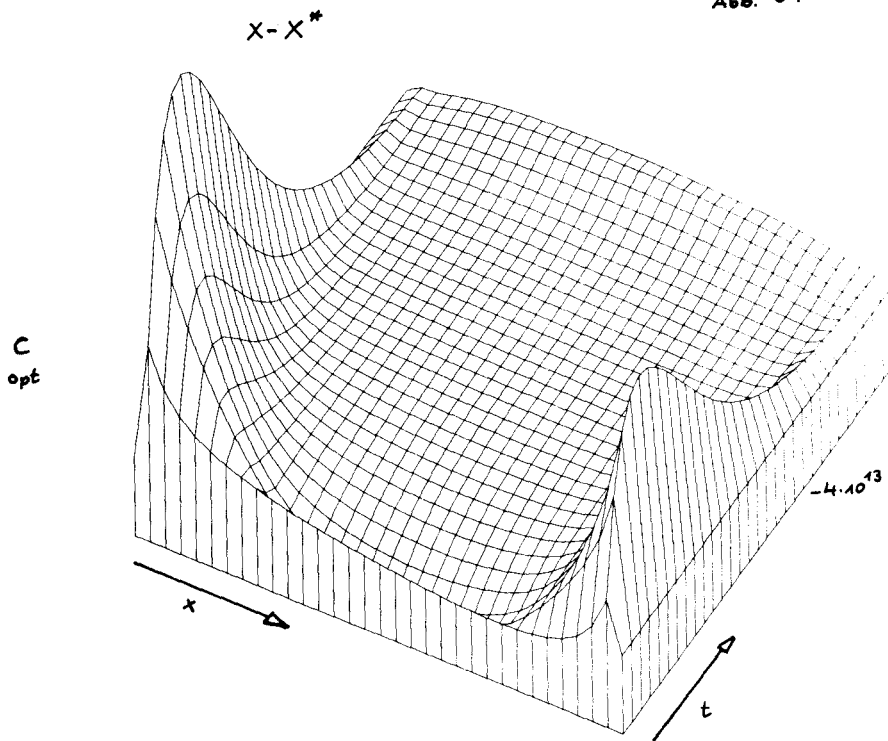


Abb. 35

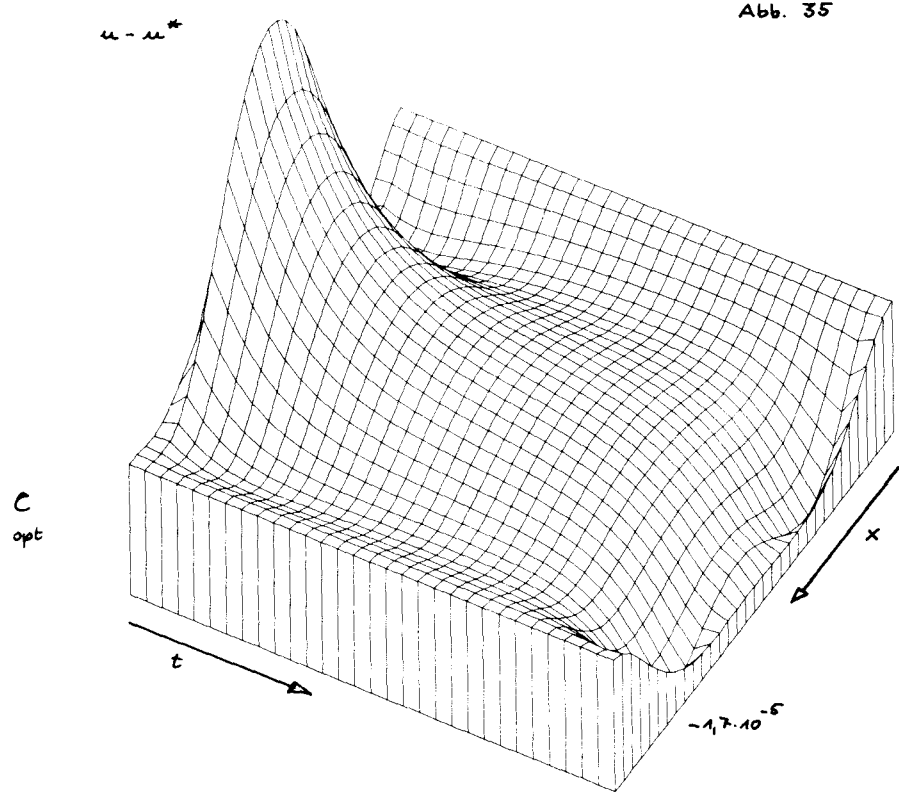
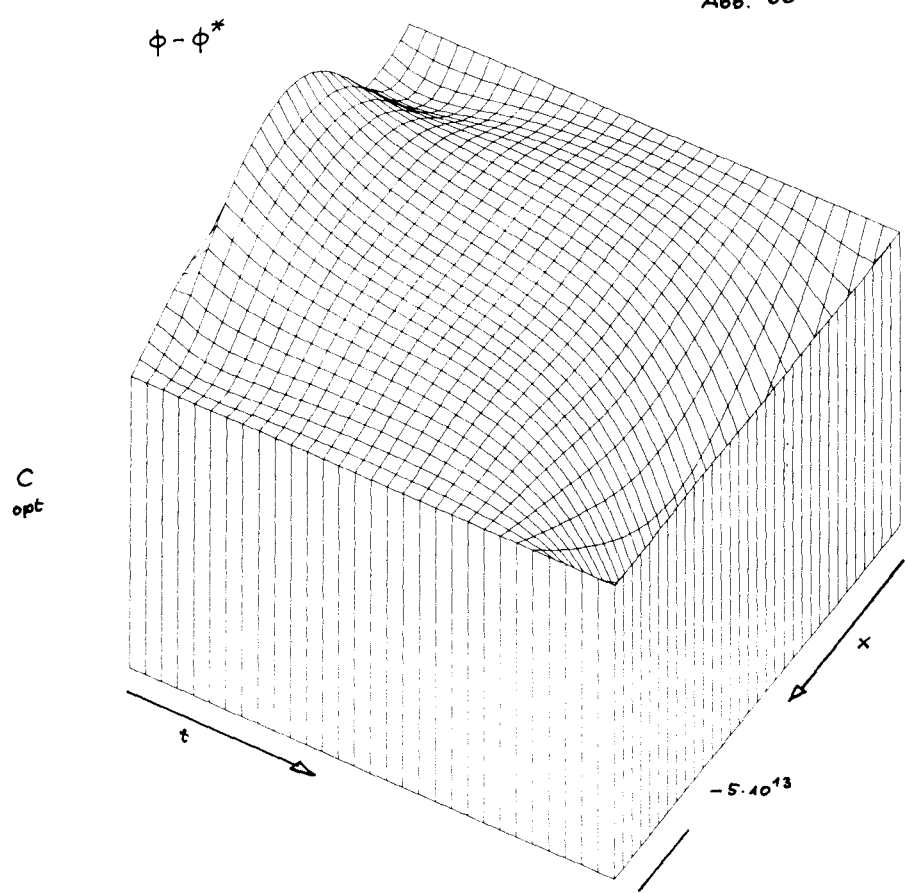


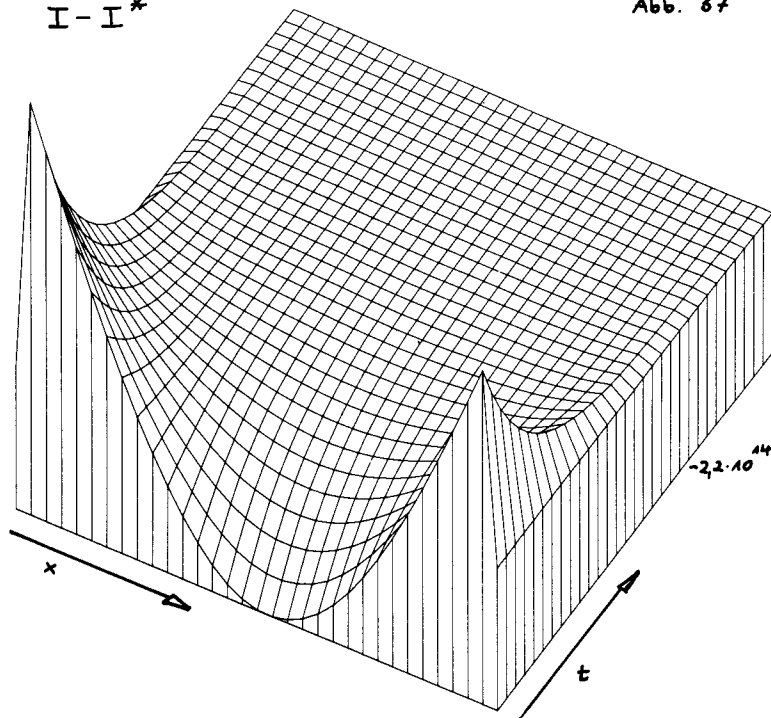
Abb. 36



$I - I^*$

Abb. 37

D_{opt}



$X - X^*$

Abb. 38

D_{opt}

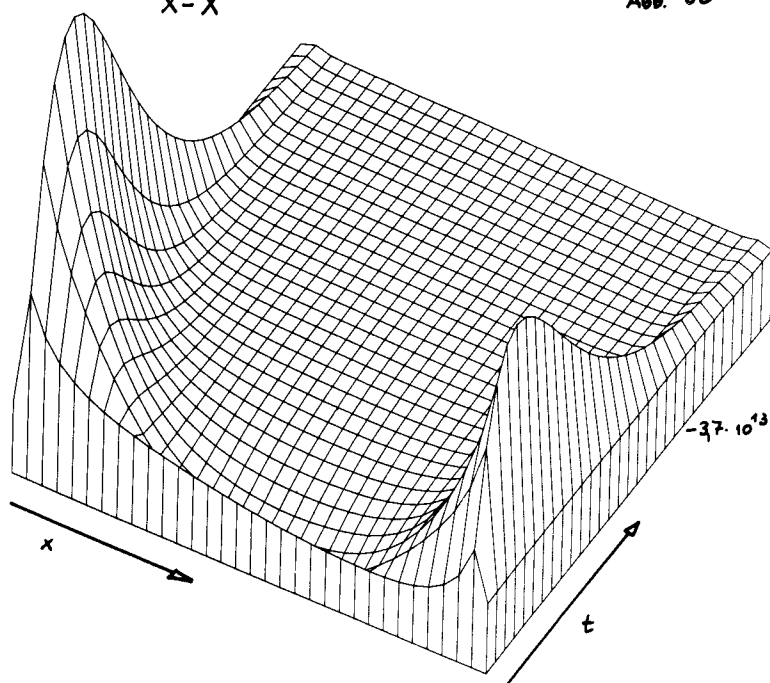


Abb. 39

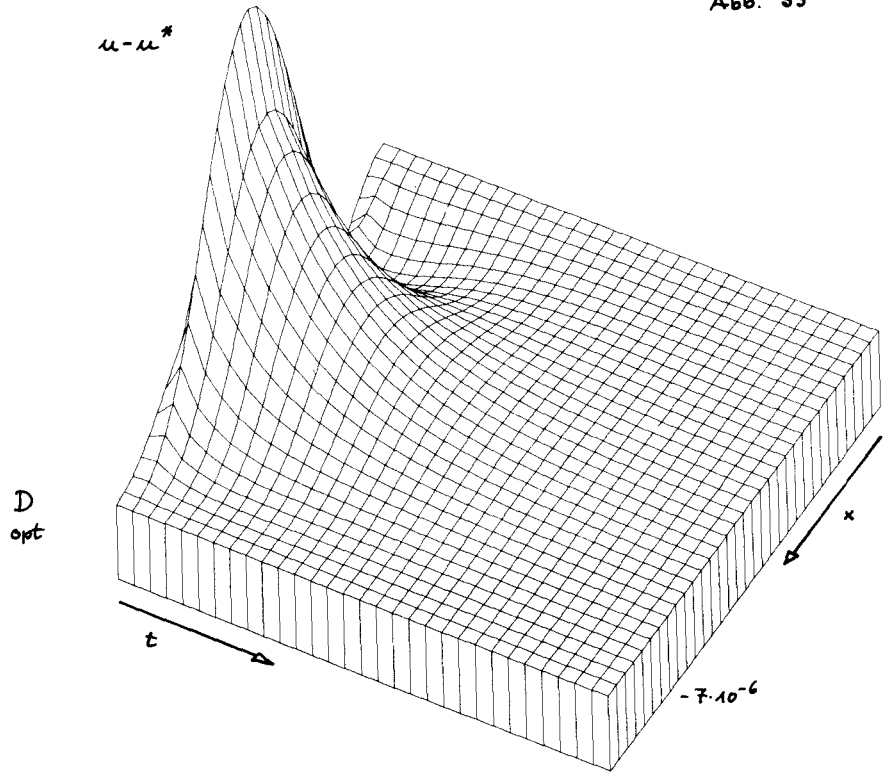


Abb. 40

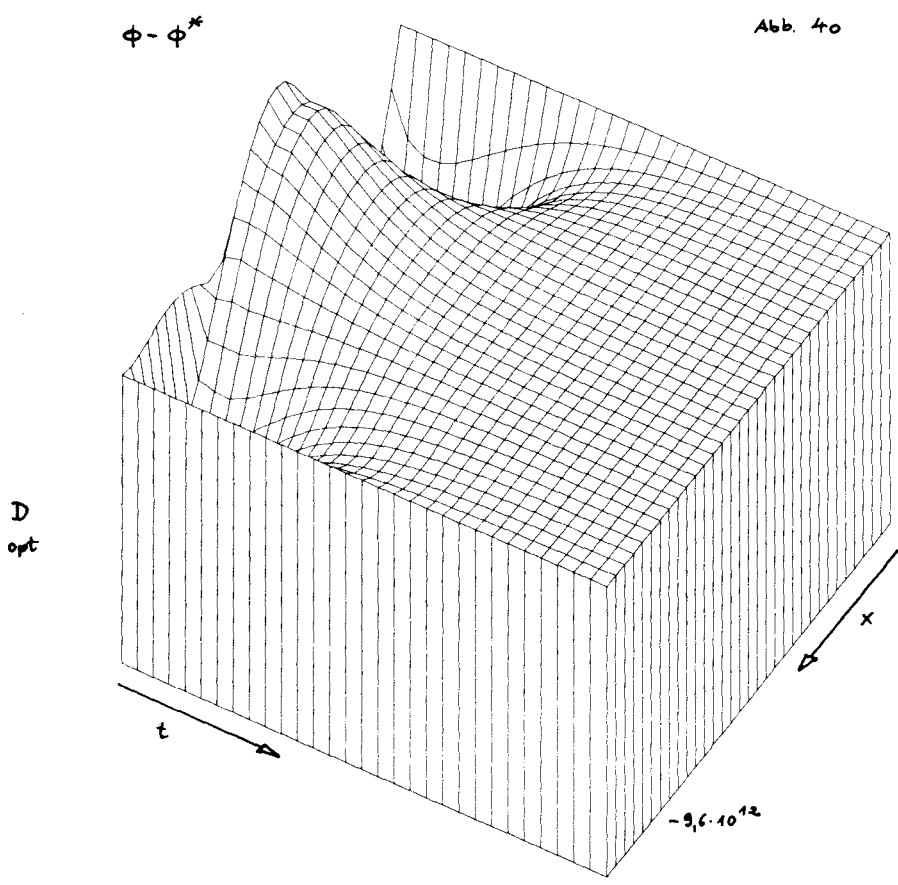


Abb. 41

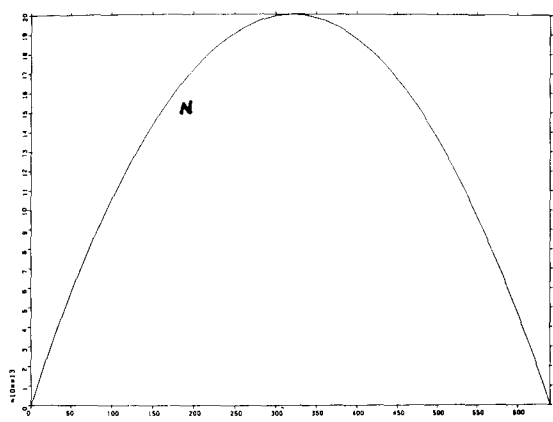


Abb. 42

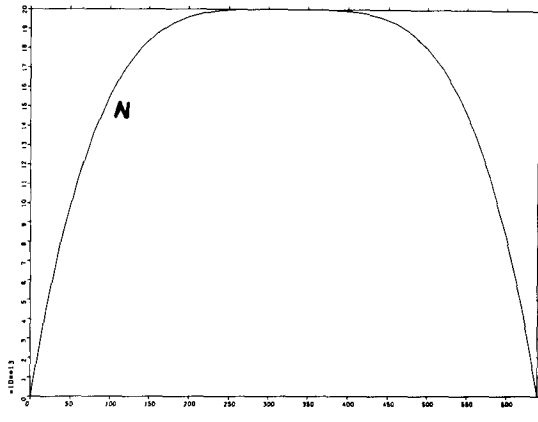


Abb. 43

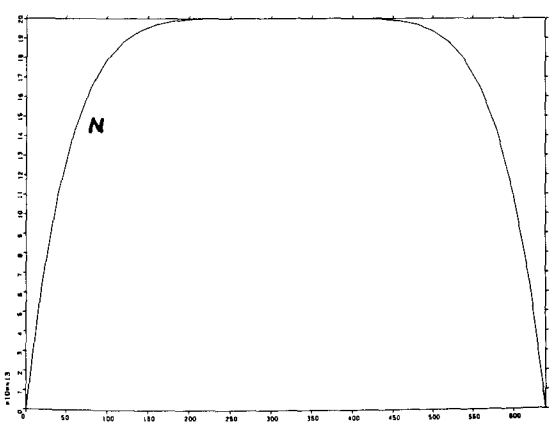


Abb. 44

